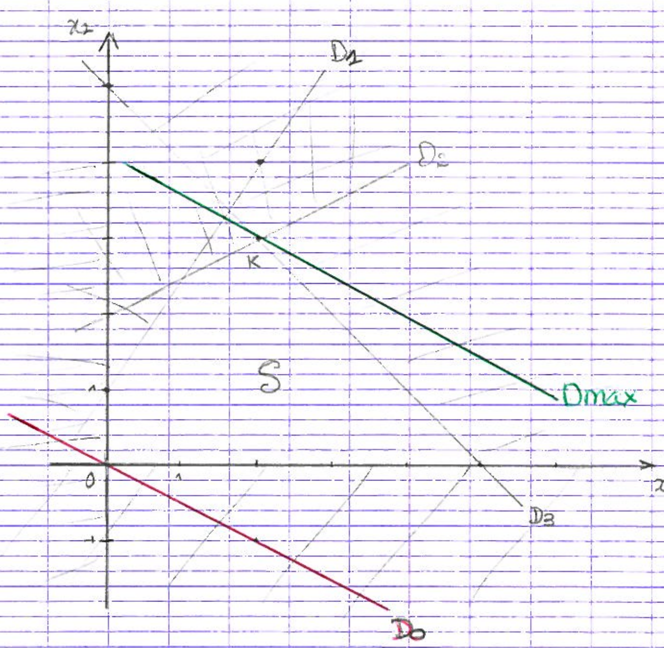
Méthode géométrique :

Ex 1 :

$$\max(Z = x_1 + 2x_2)$$

avec $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$



D_1 : $\frac{3}{2}x_1 + 1 = x_2$

D_2 : $\frac{1}{2}x_1 + 2 = x_2$

D_3 : $-x_1 + 5 = x_2$

D_0 : $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$

$K = D_2 \cap D_3$

$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2 \times 5 - 2x_1 = 4 \\ x_2 = 5 - x_1 \end{cases}$

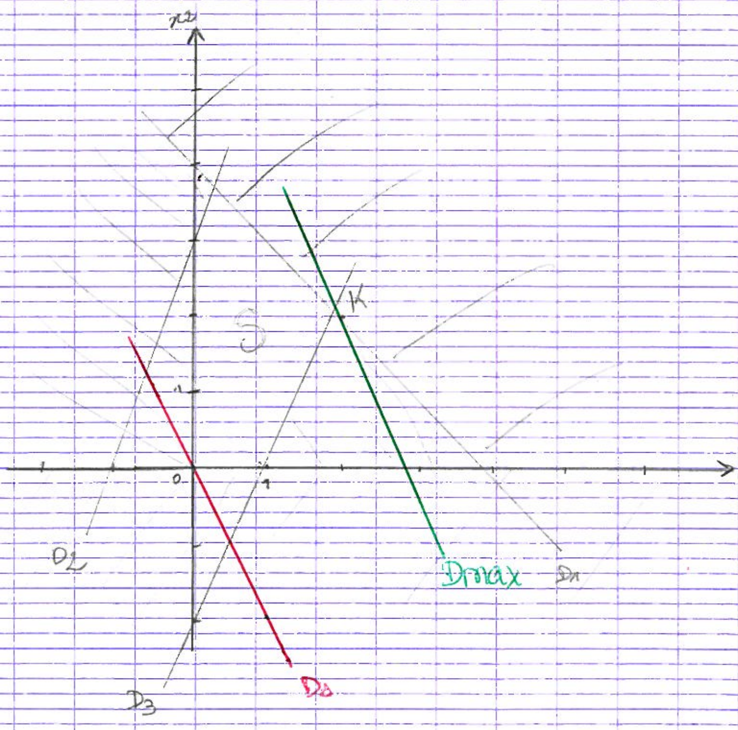
$\Rightarrow -3x_1 = -6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

D'où $Z_{max} = 2 + 2 \times 3 = 8$

Ex 2 :

(i) $\max(Z = x_1 + \frac{1}{2}x_2)$

avec : $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$



D_1 : $x_2 = 4 - x_1$

D_2 : $x_2 = 3 + 3x_1$

D_3 : $x_2 = -2 + 2x_1$

D_0 : $x_2 = -2x_1$

$K = D_1 \cap D_3$

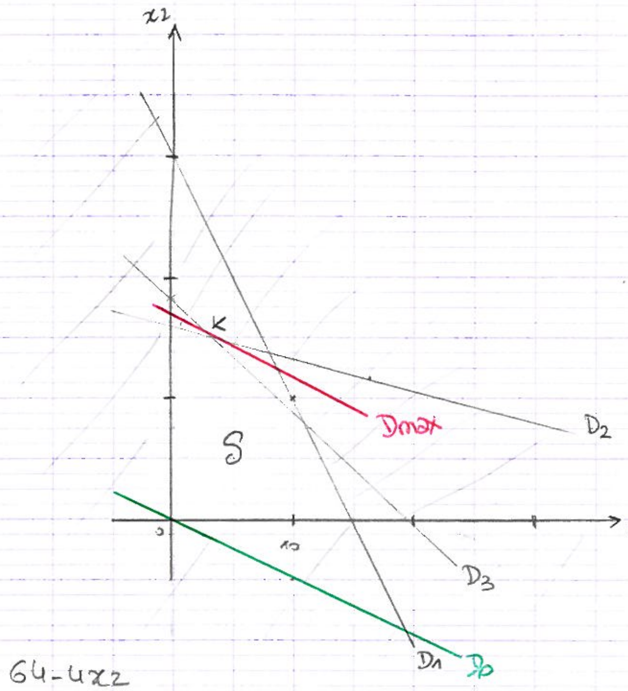
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4 - x_1 \\ x_1 - 2 + \frac{1}{2}x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 = \frac{3}{2}x_1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 2 \end{cases}$

D'où $Z_{max} = 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 3$

ii)

$\max(Z = 10x_1 + 20x_2)$

avec : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 + 4x_2 \leq 64 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 110 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$



D_1 : $x_2 = 30 - 2x_1$

D_2 : $x_2 = \dfrac{64 - x_1}{4} = 16 - \dfrac{1}{4}x_1$

D_3 : $x_2 = \dfrac{110 - 5x_1}{6} = \dfrac{55}{3} - \dfrac{5}{6}x_1$

D_0 : $x_2 = \dfrac{-10x_1}{20} = -\dfrac{1}{2}x_1$

$K = D_2 \cap D_3$

$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 64 \\ 5x_1 + 6x_2 = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 64 - 4x_2 \\ 5\times 64 - 5\times 4x_2 + 6x_2 = 110 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 64 - 4x_2 \\ -14x_2 = -210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 15 \end{cases}$

D'où $Z_{max} = 10 \times 4 + 20 \times 15 = 340$

Méthode des tableaux du simplexe :

Exo 1 : Forme standard : $\min(w = -z = -x_1 - 2x_2)$

avec : $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$

x_3, x_4, x_5 variable d'écart

1^{er} tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	sec. membre	
-1	-2	0	0	0	-1	0	L_1
-3	2	1	0	0	0	2	L_2
-1	2	0	1	0	0	4	L_3
1	1	0	0	1	0	5	L_4

La base actuelle $B_0 = (x_3, x_4, x_5)$ est réalisable car d'éléments positifs, sa solution est :

$\tilde{x}_3 = 2$ $\quad\quad \left.\begin{array}{l}\tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 0\end{array}\right)$ hors base

$\tilde{x}_4 = 4$

$\tilde{x}_5 = 5$ $\quad\quad w = 0$

Mais $c_i < 0 \Rightarrow$ la solution obtenue n'est pas optimale.

On fait alors un changement de base.

Variable entrante x_2 car $C_2 < C_1$.

Détermination de la variable sortante : on cherche $\tilde{v}$ qui optimise les contraintes de x_2

$$\begin{cases} 0 + 2.v + 1.x_3 = 2 \\ 0 + 2.v + 1.x_4 = 4 \\ 0 + 1.v + 1.x_5 = 5 \end{cases} \qquad \tilde{v} = \min\left(\frac{2}{2} ; \frac{4}{2} ; 5\right) = 1$$

variable hors base

→ la variable sortante est x_3.
(c'est l'équation qui est vérifié)

D'où la nouvelle base $B_1 = (x_2, x_4, x_5)$

Recherche du pivot : l'intersection de la ligne de la variable sortante x_3 avec la colonne de la variable entrante x_2. Pivot = 2

Echelonnage :
$$L_2' \leftarrow \frac{L_2}{2}$$
$$L_1' \leftarrow 2.\frac{L_2}{2} + L_1$$
$$L_3' \leftarrow -2.\frac{L_2}{2} + L_3$$
$$L_4' \leftarrow -1.\frac{L_2}{2} + L_4$$

2e tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	s.m.
-4	0	1	0	0	-1	2
$-3/2$	1	$1/2$	0	0	0	1
2	0	-1	1	0	0	2
$5/2$	0	$-1/2$	0	1	0	4

La base actuelle $B_1 = (x_2, x_4, x_5)$ est réalisable car d'éléments positifs.

Sa solution : $\tilde{x}_2 = 1$ $\quad \left.\begin{array}{l}\tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_3 = 0\end{array}\right)$ hors base

$\tilde{x}_4 = 2$

$\tilde{x}_5 = 4$ $\quad w = -2$

Mais $C_1 = -4 < 0 \Rightarrow$ cette solution n'est pas optimale. On fait un changement de base :

Variable entrante = x_1

On optimise les contraintes de x_1

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}\sigma \cancel{+ 1.x_2} = 1 \\ 2\sigma + 1x_4 = 2 \\ 5/2 \cdot \sigma + 1x_5 = 4 \end{cases}$$

coeff. négatif → on ne le prend pas en compte.

$$\Rightarrow \tilde{\sigma} = \min\left(\frac{2}{2} ; \frac{4}{5/2}\right) = 1$$

⇒ La variable sortante est x_4.

La nouvelle base est donc $B_2 = (x_1, x_2, x_5)$.

Recherche du pivot : pivot = 2.

$L_3' \leftarrow L_3/2$

$L_1' \leftarrow 4 . L_3/2 + L_1$

$L_2' \leftarrow 3/2 . L_3/2 + L_2$

$L_4' \leftarrow -5/2 . L_3/2 + L_4$

3e tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	s.m.
0	0	-1	2	0	-1	6
0	1	$-1/4$	$3/4$	0	0	$5/2$
1	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	1
0	0	$3/4$	$-5/4$	1	0	$3/2$

La base actuelle est $B_2 = (x_1, x_2, x_5)$ est réalisable, sa solution :

$\tilde{x}_1 = 1$ $\quad \tilde{x}_4 = 0$, $\tilde{x}_3 = 0$ } hors base

$\tilde{x}_2 = 5/2$ $\quad w = -6$

$\tilde{x}_5 = 3/2$

Mais $C_3 = -1 < 0$ ⇒ Cette solution n'est pas optimale. On fait un nouveau changement de base.

Variable entrante x_3.

Variable sortante : on optimise les contraintes de x_3 : $\frac{3}{4}\sigma + 1 . x_5 = \frac{3}{2}$

⇒ La variable sortante est x_5.

La base devient : $B_3 = (x_1, x_2, x_3)$

Recherche du pivot : pivot = 3/4

$L_4' \leftarrow \frac{4}{3} L_4$

$L_1' \leftarrow 1 . \frac{4}{3} L_4 + L_1$

$L_2' \leftarrow \frac{1}{4} . \frac{4}{3} L_4 + L_2$

$L_3' \leftarrow \frac{1}{2} \frac{4}{3} L_4 + L_3$

4e tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ω	s.m.
0	0	0	1/3	4/3	-1	8
0	1	0	1/3	-1/3	0	3
1	0	0	-1/3	2/3	0	2
0	0	1	-5/3	4/3	0	2

La base actuelle est $B_3 = (x_1, x_2, x_3)$ est réalisable, sa solution est :

$\tilde{x}_1 = 2$ $\quad$ $\left.\begin{matrix}\tilde{x}_4 = 0 \\ \tilde{x}_5 = 0\end{matrix}\right)$ hors base

$\tilde{x}_2 = 3$

$\tilde{x}_3 = 2$ $\quad$ $\omega = -8$

Cette solution est optimale car tous les $C_i > 0$.

La solution : $Z^* = 8$

Exo 2 : ① forme standard : $\min (-Z = \omega = -x_1 - \frac{1}{2}.x_2)$

avec $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + \frac{1}{2}.x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$

x_3, x_4, x_5 variable d'écart

1er tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ω	s.m
-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	0
-1	-1	1	0	0	0	4
3	-1	0	1	0	0	3
-1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	0	1	0	1

La base actuelle $B_0 = (x_3, x_4, x_5)$ est réalisable car d'éléments positifs.

Sa solution est : $\tilde{x}_3 = 4$ $\quad$ $\left.\begin{matrix}\tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 0\end{matrix}\right)$ hors base

$\tilde{x}_4 = 3$ $\quad$ $\omega = 0$

$\tilde{x}_5 = 1$

Mais $C_i < 0 \Rightarrow$ La solution obtenue n'est pas optimale.

On fait donc un changement de base.

Variable entrante x_2 car $C_2 < C_1$

Détermination de la variable sortante : on cherche $\tilde{v}$ qui optimise les contraintes de x_2

$$\begin{cases} -v + x_3 = 4 \\ -v + x_4 = 3 \\ \frac{1}{2}.v + x_5 = 1 \end{cases}$$

coeff négatif

$$\tilde{v} = \min\left(\cancel{4} ; \cancel{3} ; \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \cancel{4}\ 2$$

→ La variable sortante est ~~x_3~~ x_5

D'où la base : $B_1 = (x_2, x_4, x_3)$

Recherche du pivot : l'intersection de la ligne de x_5 et de la colonne x_2. Pivot = $\cancel{-1}$ $\frac{1}{2}$

Echelonnage : $L_4' \leftarrow$

$L_1' \leftarrow \quad + L_1$

$L' \leftarrow \quad + L$

$L' \leftarrow \quad + L$

2e tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	s.m.
$-\frac{1}{2}$	0	$-1/2$	0	0	-1	
1	1	-1	0	0	0	
2	-2	1	1	0	0	
$-1/2$	1	$-1/2$	0	1	0	

La base actuelle B_1 est réali