



CHAPITRE 3 : COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES

Table des matières

1.	Fonction de répartition, mesure de probabilité et lois marginales	1
1.1.	Cas de variables aléatoires continues	1
1.2.	Cas de variables aléatoires discrètes	2
2.	Indépendance et corrélation	3
2.1.	Indépendance de variables aléatoires	3
2.2.	Corrélation de variables aléatoires	4
3.	Transformation de vecteurs aléatoires continus	4
	Exercices	Erreur ! Signet non défini.
	Exercices supplémentaires	Erreur ! Signet non défini.

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires :

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Y : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$$

On étudie alors le couple (X, Y) à valeurs dans \mathbb{R}^2 muni de sa tribu borélienne.

1. FONCTION DE REPARTITION, MESURE DE PROBABILITE ET LOIS MARGINALES

La *fonction de répartition* du couple (X, Y) donnée par

$$F(x, y) = P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)],$$

définit alors la loi jointe du couple.

On appelle *lois marginales* les lois de probabilités de X et Y pris séparément.

1.1. Cas de variables aléatoires continues

Si le couple (X, Y) admet une *fonction de densité conjointe* f alors on a

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y),$$

et on retrouve

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds.$$

Les fonctions de répartitions marginales se déduisent immédiatement,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t) dt ds$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(s,t) dt ds$$

Les fonctions de densité marginales s'obtiennent en dérivant les fonctions de répartition marginales

$$\text{Loi marginale de } X : f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) dt \text{ (dérivée par rapport à } x)$$

$$\text{Loi marginale de } Y : f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,y) ds \text{ (dérivée par rapport à } y)$$

De la même façon que pour une variable aléatoire, on calcule la probabilité d'un événement A de la tribu engendrée par le couple (X,Y), par exemple $A = \{(X,Y), X+Y=0\}$, par l'intégrale

$$P(A) = \int \int_A f(x,y) dy dx = \int \int_{\{x+y=0\}} f(x,y) dy dx.$$

L'espérance s'obtient de la même manière

$$E[h(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f(x,y) dy dx.$$

Exemple 1

Soit le vecteur aléatoire (X,Y) de fonction de densité conjointe suivante

$$f(x,y) = \begin{cases} 2ye^{-x} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les lois marginales sont données par

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition conjointe est

$$F(s,t) = \begin{cases} (1-e^{-s})t^2 & \text{si } s \geq 0 \text{ et } 0 < t < 1 \\ 1-e^{-s} & \text{si } s \geq 0 \text{ et } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On peut aussi calculer la probabilité $P(X+Y > 1) = 2e^{-1}$.

1.2. Cas de variables aléatoires discrètes

Supposons que les variables aléatoires X et Y prennent des valeurs dénombrables respectivement $x_i, i \in I$ et $y_j, j \in J$. On définit la *fonction de masse conjointe* du couple (X,Y) par

$$\forall i \in I, \forall j \in J, p(x_i, y_j) = P[(X=x_i) \cap (Y=y_j)].$$

Les fonctions de masse marginales sont données par

$$\text{Loi marginale de } X : p_X(x_i) = \sum_{j \in J} p(x_i, y_j) \quad \forall i \in I.$$

$$\text{Loi marginale de } Y : p_Y(y_j) = \sum_{i \in I} p(x_i, y_j) \quad \forall j \in J.$$

De la même façon, on peut calculer la probabilité d'un événement ainsi que l'espérance.

2. INDEPENDANCE ET CORRELATION

2.1. Indépendance de variables aléatoires

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout couple de boréliens B_i et B_j , on a

$$P((X \in B_i) \cap (Y \in B_j)) = P(X \in B_i) \times P(Y \in B_j).$$

Autrement dit la loi de probabilité P_{XY} du couple (X, Y) est égale au produit des lois de probabilité P_X et P_Y de X et de Y ,

$$P_{XY} = P_X \times P_Y.$$

On en déduit que X et Y sont indépendantes si et seulement si la fonction de répartition du couple est égale au produit des fonctions de répartition marginales,

$$F(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y).$$

Cas continu

Si X et Y admettent pour fonctions de densité f_X et f_Y respectivement, alors X et Y sont indépendantes si et seulement si la fonction de densité du couple (X, Y) est égale au produit des fonctions de densité,

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

Exemple 1 (suite)

Dans l'exemple précédent, la densité conjointe est égale au produit des densités marginales donc les variables X et Y sont indépendantes.

Propriété

Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Remarque : Attention la réciproque n'est pas vraie.

On en déduit alors immédiatement les résultats suivants.

Propriété

- Soient X et Y deux variables aléatoires admettant les fonctions génératrices M_X et M_Y définies pour tout $t \in]t_1, t_2[$ et $0 < t_1 < t_2$. Si X et Y sont indépendantes alors

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t), \quad \forall t \in]t_1, t_2[.$$

- Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de fonctions caractéristiques Φ_X et Φ_Y alors

$$\Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y.$$

2.2. Corrélation de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérances respectives μ_X et μ_Y . La *covariance* du couple (X,Y) est définie par

$$\text{cov}(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y.$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors

$$\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + b^2 \text{var}(Y) + 2ab \text{cov}(X,Y)$$

où a et b sont des réels.

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors :

$$\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

$$\text{cov}(X,Y) = 0$$

(attention, en général, les réciproques sont fausses)

Définition

On appelle *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y le rapport

$$\rho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

On dit que X et Y sont *complètement corrélées* si $|\rho| = 1$ et sont *non corrélées* si $\rho = 0$. On définit la *matrice de covariance*

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho \\ \rho & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

Remarque

Le coefficient de corrélation linéaire traduit l'existence ou non d'une relation linéaire entre X et Y .

Propriété

Si X et Y sont indépendantes alors elles sont non corrélées.

3. TRANSFORMATION DE VECTEURS ALEATOIRES CONTINUS

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et (X_1, X_2) un vecteur aléatoire de fonction de densité f . Soit ϕ une application bijective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 ,

$$\phi : x = (x_1, x_2) \mapsto \phi(x_1, x_2) = (\phi_1(x), \phi_2(x)).$$

La fonction de densité du vecteur aléatoire transformé $Y = \phi(X)$, est donnée par

$$g(y) = \frac{f[\phi^{-1}(y)]}{|\det J|},$$

où J est la matrice jacobienne de ϕ .

Exemple 2

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Alors la loi conjointe de (X_1, X_2) est

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

On note $Y_1 = X_1 + X_2$ et $Y_2 = X_1 + 2X_2$. Alors l'application ϕ est définie par

$$\phi(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$$

d'où

$$\phi^{-1}(y_1, y_2) = (x_1, x_2) = (2y_1 - y_2, y_2 - y_1) \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, la densité conjointe du vecteur (Y_1, Y_2) est

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(5y_1^2 + 2y_2^2 - 6y_1y_2)}.$$