

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1^{re} Année Ingénieurs (2012-13)
Introduction à la Simulation Monte-Carlo

par Marietta Manolessou

22 février 2013

Table des matières

1	Généralités	1
1	Principe	1
1	1 Etude de systèmes et Simulation	1
2	2 Simulation et Optimisation	2
2	La Méthode de Simulation Monte-Carlo	3
1	Le rôle de la variable aléatoire Uniforme (continue) $\mathcal{U}([0, 1])$	3
1	1 Rappel : Loi uniforme	3
2	Loi Uniforme et Simulation	4
1	1 Théorème (Rappel)-illustration du rôle de $\mathcal{U}([0, 1])$	4
3	Simulations	5
1	1 Simulation d'une variable aléatoire continue	5
2	2 Simulation d'une variable aléatoire discrète.	5
3	Simulation de la Loi Normale (Gaussienne)	7
1	1 ^{re} méthode de Simulation de la Loi Normale $\mathcal{N}(0; 1)$	7
1	1 Rappel- Echantillon	7
2	2 Rappel : Théorème de la "Limite Centrale"	7
3	3 Simulation de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$ (1 ^{re} méthode)	8
2	2 ^{me} méthode de Simulation de la Loi Normale $\mathcal{N}(0; 1)$ – (La méthode des Polaires)	9
1	1 Rappels - A	9
2	2 Rappels - B – (Changement de variables multidimensionnelles)	9
3	3 2 ^{me} méthode de simulation de la loi Normale : “Les polaires”	11

Table des figures

3.1	Le cercle \mathcal{C} de rayon $R = 1$ centré à l'origine.	13
-----	--	----

Chapitre 1

Généralités

1 Principe

Les différentes méthodes de simulation permettent de reproduire **artificiellement des réalisations de certaines variables aléatoires** (qui modélisent souvent le fonctionnement des différents systèmes physiques, et qui respectent certaines lois de probabilités).

Ces réalisations permettent de **faire des estimations** des paramètres statistiques les plus importants des systèmes et ainsi tenter une étude plus efficace pour **optimiser** le fonctionnement et la fiabilité de ces systèmes.

1 Etude de systèmes et Simulation

Trois types d'études :

a) Fonctionnement réel du système.

a.1 Inconvénients

- (i) Coût excessif
- (ii) Danger potentiel dû à une mauvaise "décision" (ex. : centrales nucléaires)
- (iii) Approximation des paramètres caractéristiques aléatoires.

a.2 **Avantage** On respecte toutes les caractéristiques du système.

b) Modélisation d'après les équations dynamiques (ou de transfert) du système

b.1 Inconvénients

- (i) le modèle ne traduit pas toujours fidèlement la réalité
- (ii) Difficultés de mise en oeuvre

b.2 **Avantage** Formules et calcul exact des paramètres aléatoires. (Espérance, Ecart type, etc. . .)

c) Modélisation du système d'après les équations dynamiques mais en utilisant des méthodes de **simulation**.

c.1 Inconvénients

- (i) Le modèle peut ne pas reproduire fidèlement la réalité
- (ii) Il s'agit seulement d'une approximation des variables aléatoires.

c.2 **Avantage** Facilité de mise en oeuvre

2 Simulation et Optimisation

Souvent les problèmes d'optimisation du fonctionnement d'un système ne sont pas toujours modélisés en termes de variables déterministes, mais font intervenir différentes variables aléatoires voir processus stochastiques, comme l'exemple ci-dessous :

$$(P.0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Opt. } f(X_1 \dots X_n) \\ \text{avec } \rho_1(X_i \ i = 1, \dots, n) = b_1 \\ \quad \vdots \dots \dots \vdots \\ \quad \vdots \dots \dots \vdots \\ \rho_m(X_i \ i = 1, \dots, n) = b_m \end{array} \right.$$

L'utilisation des différentes méthodes de Simulation permet :

de **calculer** \Leftrightarrow **estimer**

$$\left[\begin{array}{l} \text{des paramètres statistiques} \\ \text{(Espérances, Variances, etc) } \dots \\ \text{et par la suite } \mathbf{améliorer} \text{ certaines caractéristiques du système } \dots \\ \text{donc } \mathbf{optimiser} \text{ ses performances} \end{array} \right.$$

Parmi les méthodes multiples de Simulation on a choisi d'étudier celle qui semble la plus appropriée à votre domaine d'ingénieur du traitement de l'information : la **méthode Monte-Carlo**.

Chapitre 2

La Méthode de Simulation Monte-Carlo

1 Le rôle de la variable aléatoire Uniforme (continue)

$$\mathcal{U}(]0, 1])$$

1 Rappel : Loi uniforme

Fonction de densité - Fonction de répartition

Définition 2.1

X variable aléatoire continue suit la loi uniforme sur $]a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow X : \mathcal{U}(]a, b]),$$

si elle admet comme support :

$$C_X =]a, b]$$

et fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in C_X \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

* **Autrement :** *X* décrit l'expérience aléatoire de choisir au hasard un point *x*, sur l'intervalle $]a, b]$ de façon à ce que la probabilité $P[\{x \in]a, b]\}$ soit indépendante du sous-intervalle choisi pour la variation de *x*.

* Soit $X : \mathcal{U}(]a, b])$, alors :

La fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Loi uniforme, $X : \mathcal{U}(]0, 1])$

D'une manière analogue :

Définition 2.2

X variable aléatoire continue suit la loi uniforme sur $]0, 1] \subset \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow X : \mathcal{U}(]0, 1]),$$

si elle admet comme support :

$$C_{\mathcal{U}} =]0, 1]$$

et fonction de densité :

$$f_{\mathcal{U}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C_{\mathcal{U}} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

–

$$\text{Fonction de répartition} \quad F_{\mathcal{U}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

– Espérance ;

$$E[\mathcal{U}] = \frac{1}{2}$$

– Variance :

$$\sigma_{\mathcal{U}}^2 = \frac{1}{12}$$

2 Loi Uniforme et Simulation

1 Théorème (Rappel)-illustration du rôle de $\mathcal{U}(]0, 1])$

Théorème 2.1 Soit X variable aléatoire continue avec F_X fonction de répartition, alors la variable aléatoire “transformée” $Y = F_X(x)$ suit une loi uniforme $\mathcal{U}(]0, 1])$

Remarque Importante Grâce à ce théorème, en prenant l'inverse de la fonction de répartition :

$$F_X^{-1}(u) = x,$$

on "simule" une variable aléatoire continue par la méthode Monte-Carlo.

Rappel :

On peut trouver sur les programmes des langages *C* et *JAVA* des fonctions prêtes de Simulation de la variable aléatoire uniforme $\mathcal{U}(]0, 1])$, en voici un exemple :

Définition 2.3 Fonction *random* ("RANDOM")

$$\begin{aligned} &(\text{Simulation de } U : \mathcal{U}(]t, \infty])) \\ &(\text{Algorithme en C}) \end{aligned}$$

On choisit un entier (*num*) et :

$$\begin{cases} \text{float } x ; \\ x = (\text{float}) \text{RANDOM}(\text{num}) / (\text{float})\text{num} ; \end{cases}$$

Remarque

Plus num est grand, plus l'approximation est meilleure.

Aux paragraphes suivants on présente les deux principales applications :

Simulations d'une :

- a) variable aléatoire continue ;
- b) variable aléatoire discrète.

3 Simulations

1 Simulation d'une variable aléatoire continue

Proposition 2.1 Soit X variable aléatoire continue et $F_X(x)$ sa fonction de répartition. Pour faire m réalisations indépendantes $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ de X , on appelle m fois la fonction "RANDOM" et on obtient m valeurs $\{u_1, \dots, u_m\}$; $\forall u_j$, on cherche α_j tel que

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} F_X(\alpha_j) &= u_j \\ \alpha_j &= F_X^{-1}(u_j) \end{aligned}$$

Exemple 2.1 Loi exponentielle

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

A chaque valeur u_j générée par "RANDOM", on cherche

$$\begin{aligned} \alpha_j &\text{ t.q. } u_j = F_X(\alpha_j) \\ \Leftrightarrow u_j &= 1 - e^{-\theta \alpha_j} \\ \Leftrightarrow e^{-\theta \alpha_j} &= 1 - u_j \\ -\theta \alpha_j &= \ln |1 - u_j| \\ \Leftrightarrow \alpha_j &= \ln |1 - u_j| / -\theta \end{aligned}$$

Exercice :

Simuler une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$; faire une estimation de sa moyenne et de sa variance. Comparer vos résultats avec les valeurs théoriques de ces paramètres.

2 Simulation d'une variable aléatoire discrète.

Le principe est le même : "l'Inversion" de la fonction de répartition se fait en comparant deux de ses valeurs successives avec le nombre u_j "RANDOM" pris au hasard ; la valeur simulée a_i de X est celle qui correspond à la plus grande valeur de la fonction de répartition.

Plus explicitement :

Proposition 2.2 Soit X une variable aléatoire discrète avec support :

$$D_X = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ fonction de masse : } p_X(x_k) \text{ et fonction de répartition } F_X(x_i) = \sum_{k=1}^i p_X(x_k)$$

Notations :

$$p_k(x_k) \equiv p_X(x_k) \equiv p_k.$$

Pour faire m réalisations indépendantes $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ de X , on appelle m fois la fonction "RANDOM" et on obtient m valeurs $\{u_1, \dots, u_m\}$; $\forall u_j$, on cherche $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{i-1} p_k \leq u_j < \sum_{k=1}^i p_k$$

et on pose

$$\boxed{\alpha_j = x_i}$$

Exemple 2.2 Soit X une variable aléatoire discrète avec $(k \in \{1, 2, 3\})$:

x_k	1	2	3
P_k	0,3	0,5	0,2

"RANDOM" : $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0,4 ; \\ u_2 = 0,65 ; \\ u_3 = 0,15 ; \\ u_4 = 0,85 ; \\ u_5 = 0,79 \end{array} \right.$$

\Rightarrow on trouve

$$\begin{aligned} u_1 &\Rightarrow \alpha_1 = x_2 \equiv 2 \\ u_2 &\Rightarrow \alpha_2 = x_2 \equiv 2 \\ u_3 &\Rightarrow \alpha_3 = x_1 \equiv 1 \\ u_4 &\Rightarrow \alpha_4 = x_3 \equiv 3 \\ u_5 &\Rightarrow \alpha_5 = x_2 \equiv 2 \end{aligned}$$

Exercice :

- i). Simuler une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$. et faire une estimation de sa moyenne et de sa variance . Comparer vos résultats avec les valeurs théoriques de ces paramètres.
- ii). Faire pareil pour une variable aléatoire Binômiale $\mathcal{B}(n; p)$, de paramètres $n = 50; p = 0,02$

Chapitre 3

Simulation de la Loi Normale (Gaussienne)

1 1^{re} méthode de Simulation de la Loi Normale $\mathcal{N}(0; 1)$

1 Rappel- Echantillon

Définition 3.1

On définit un **échantillon** par les données suivantes.

1. Le n -uplet de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) indépendantes qui suivent la même loi de probabilité avec paramètres (μ, σ^2) .
2. X une variable aléatoire abstraite appelée variable aléatoire parente, (qui suit la même loi) avec paramètres (μ, σ^2)
3. $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique de l'échantillon, qui vérifie les propriétés :

$$E[\bar{X}] = \mu \quad \text{var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2 Rappel : Théorème de la "Limite Centrale"

Théorème 3.1 (Théorème de la "Limite Centrale") :

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) , et X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}) , suivant la même loi de probabilité et telles que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad E[X_i] = \mu, \quad \text{var}[X_i] = \sigma^2$$

existent,

\Rightarrow

la suite $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ où

$$Y_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)$$

converge en loi vers une variable aléatoire $Y : \mathcal{N}(0, 1)$.

3 Simulation de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$ (1^{re} méthode)

Pour simuler la loi Normale on applique le théorème “limite centrale” en utilisant comme échantillon une suite de variables aléatoires Uniformes continues sur $]0, 1]$

$$\Leftrightarrow (X_1, \dots, X_n) = (\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n)$$

Alors, puisque :

$$E[\mathcal{U}] = \frac{1}{2}; \quad \sigma_{\mathcal{U}}^2 = \frac{1}{12}$$

le théorème “**lim.centrale**” implique que pour n suffisamment grand, la variable aléatoire :

$$Y_n = \sqrt{n} \frac{\bar{\mathcal{U}} - 0,5}{1/\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n ((\mathcal{U}_i - 0,5)\sqrt{12})$$

suit la loi Normale $Y : \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice :

- i). Simuler une variable aléatoire qui suit la loi Normale $Y : \mathcal{N}(0, 1)$ et faire une estimation de sa moyenne et de sa variance . Comparer vos résultats avec les valeurs théoriques de ces paramètres.
- ii). Faire pareil pour une variable aléatoire Normale $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de paramètres $\mu = 10; \sigma = 2$.

2 2^{me} méthode de Simulation de la Loi Normale $\mathcal{N}(0; 1)$ – (La méthode des Polaires)

1 Rappels - A

Lemme 3.1 Soit U variable aléatoire uniforme sur $]0, 1]$

$$\Rightarrow \tilde{U} = 1 - U$$

est une variable aléatoire uniforme sur $]0, 1]$.

Preuve

$$\begin{aligned} \Phi(U) &= \tilde{U} : \tilde{U} = 1 - U \\ \psi(\tilde{U}) &= U = 1 - \tilde{U} \\ \Rightarrow \psi'(\tilde{U}) &= -1 \\ f_{\tilde{U}} &= f_U(\psi(\tilde{U}))|\psi'(\tilde{U})| = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{U} \in]0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

Corollaire 3.1

D'après Lemme 3.1

$$X = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda} \quad \text{loi exponentielle de paramètre } \lambda$$

$$Y = -\frac{\ln(\tilde{U})}{\lambda} \quad \text{loi exponentielle de paramètre } \lambda \text{ et d'espérance } \frac{1}{\lambda}$$

2 Rappels - B–(Changement de variables multidimensionnelles)

(voir cours Probab II)

Proposition 3.1 Soient (Ω, F, P) et 2 variables aléatoires X_1 et X_2 conjointement continues de densité $f_{X_1 X_2}$. Soient $Y_1 = \rho_1(X_1 X_2)$; $Y_2 = \rho_2(X_1 X_2)$ 2 fonctions de X_1 et X_2 .

Si les 2 conditions suivantes sont vérifiées

C.1 le système d'équations
$$\begin{cases} y_1 = \rho_1(x_1, x_2) \\ y_2 = \rho_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

a une solution :

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(y_1, y_2) \\ x_2 &= h_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

C.2 les fonctions ρ_1, ρ_2 sont continûment différentiables et de Jacobien $\neq 0$ partout \Leftrightarrow

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\forall x_1, x_2)$$

alors les variables Y_1 et Y_2 sont conjointement continues et de densité :

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) |J(x_1, x_2)|^{-1} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{où } x_1 = h_1(y_1, y_2) \\ x_2 = h_2(y_1, y_2) \end{array} \right\}$$

*** analogie avec le théorème de la transformée à une dimension

Exemple 3.1 Soient X_1, X_2 , 2 variables aléatoires conjointement continues de fonction de densité conjointe donnée : f_{x_1, x_2} .

$$\text{Si } Y_1 = X_1 + X_2 \text{ et } Y_2 = X_1 - X_2 \left(J = -2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{alors } \Rightarrow f_{Y_1 Y_2}(y_1 y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1 X_2} \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right) \text{ car } \left(x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} \right)$$

Différents cas intéressants

si

a) X_1, X_2 indépendantes uniformes.

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1 y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq y_1 + y_2 \leq 2 ; 0 \leq y_1 - y_2 \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

b) X_1, X_2 indépendantes exponentielles (de paramètres λ_1, λ_2 respectivement)

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1 y_2) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} \exp\{-\lambda_1 (\frac{y_1 + y_2}{2}) - \lambda_2 (\frac{y_1 - y_2}{2})\} & \text{si } \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 0 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \end{cases} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

c) X_1, X_2 indépendantes et normales centrées réduites \Rightarrow

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1 y_2) = \frac{1}{4\pi} \exp \left[-\frac{(y_1 + y_2)^2}{8} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{8} \right] = \frac{e^{-y_1^2/4}}{\sqrt{4\pi}} \frac{e^{-y_2^2/4}}{\sqrt{4\pi}}$$

On s'attendraità cette factorisation et ..

on découvre que $X_1 + X_2$ **est indépendante** de $X_1 - X_2$.

Théorème 3.2

Pour 2 variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et de même fonction de répartition F

\Rightarrow Les variables $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ sont indépendantes ssi F est une fonction de répartition de variable normale.

Exemple 3.2 Soient X, Y variables aléatoires normales **centrées réduites indépendantes**

Soit $r = \rho_1(x, y)$, $\theta = \rho_2(x, y)$ ou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan y/x$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{2(x^2 + y^2)^{1/2}} & \frac{2y}{2(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ -\frac{1}{x^2} \frac{y}{(1 + \frac{y^2}{x^2})} & \frac{1}{x(1 + \frac{y^2}{x^2})} \end{vmatrix}$$

donc :

$$J = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}$$

et comme la densité conjointe $f_{X,Y}$ a la forme :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + y^2)/2}$$

\Rightarrow densité conjointe de (R, θ) nouveau couple de variables aléatoires

$\Rightarrow f(r, \theta) = \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2} \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < r < \infty$

$\Rightarrow f$ est décomposable en produit de densité marginales de R et $\theta \Rightarrow R, \theta$ indépendantes : **R suit une distribution de Rayleigh de densité**

$$f(r) = r e^{-r^2/2} \quad 0 < r < +\infty,$$

et θ **suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.**

Si on s'intéresse au vecteur (R^2, θ)

$$d = x^2 + y^2 \quad \theta = \arctan(y/x)$$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{2x}{-y} & \frac{2y}{x} \\ \frac{1}{x^2 + y^2} & \frac{1}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = 2$$

\Rightarrow distribution conjointe

$$f_{R^2, \theta}(d, \theta) = \frac{1}{2} e^{-d/2} \frac{1}{2\pi} \quad 0 < d < +\infty \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$\Leftrightarrow R^2$ et θ **sont indépendantes**

R^2 suit une distribution exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$ et θ une distribution uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Cohérence avec le résultat : $R^2 = X^2 + Y^2$ suit une

loi χ^2 à 2 degrés de liberté

\Leftrightarrow **loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.**

3 2^{me} méthode de simulation de la loi Normale : “Les polaires”

Soient U_1, U_2 deux variables aléatoires de distribution uniforme sur $]0, 1]$.

On détermine 2 transformations de U_1 et U_2 qui donnent 2 variables **normales centrées réduites** (X_1, X_2) en considérant les coordonnées polaires :

$$\left. \begin{array}{l} R^2 = X_1^2 + X_2^2 \\ \text{et } \theta = \arctan \frac{X_2}{X_1} \end{array} \right\} \text{indépendantes si } X_1, X_2 \text{ sont indépendantes.}$$

$-2 \ln U_1$ suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{R^2 = -2 \ln U_1}$ et pour θ on prend $\underline{2\pi U_2}$ (uniforme sur $[0, 2\pi]$)
comme

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = R \cos \theta \\ X_2 = R \sin \theta \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

X_1, X_2 **variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes** (voir l'exemple 3.2).

Méthode des Polaires

Conclusion Pour X_1, X_2 var.normales standard indépendantes on a donc :

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = (-2 \ln U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2) \\ X_2 = (-2 \ln U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2) \end{array} \right\} \quad (2.3.1)$$

(gaussiennes standard indépendantes)

Remarque :

Mais, on veut réduire le temps de calcul qui risque d'être long à cause des sinus et cosinus)

Si U Uniforme sur $(0,1) \Rightarrow 2U$ est Uniforme sur $[0,2]$

$$\Rightarrow 2U - 1 \text{ Uniforme sur } [-1, 1].$$

Si on génère 2 nombres U_1, U_2 et que l'on pose le vecteur :

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 2U_1 - 1 \\ V_2 = 2U_2 - 1 \end{array} \right\}$$

\Rightarrow

le vecteur (V_1, V_2) est uniformément distribué à l'intérieur du carré d'aire 4 et de centre $(0, 0)$.

Si on génère une suite de couples (V_1, V_2) jusqu'à ce que (V_1, V_2) soient tel que :

$$V_1^2 + V_2^2 \leq 1$$

\Rightarrow le vecteur (V_1, V_2) est à l'intérieur du cercle \mathcal{C} .

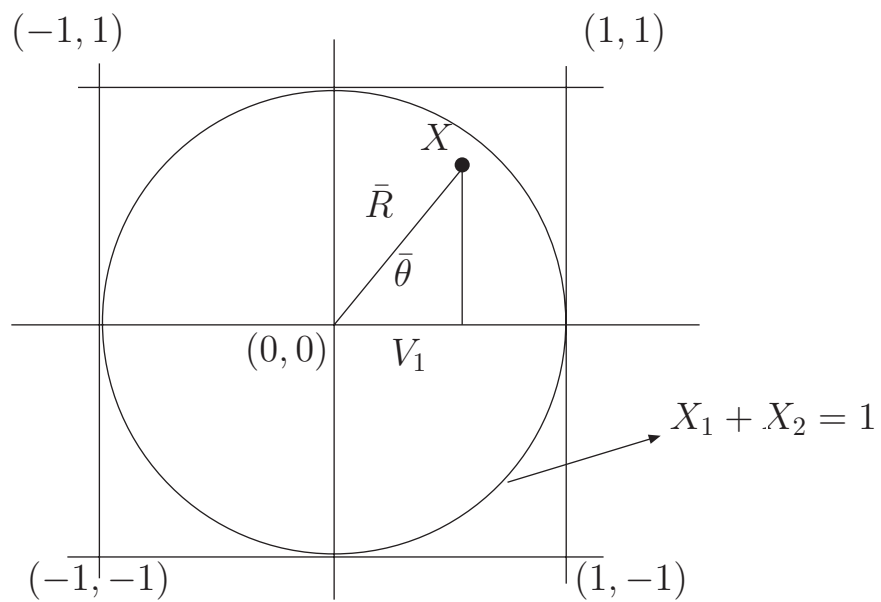
Si (R, θ) les coordonnées polaires

$$\sin \theta = V_2 / \bar{R} = \frac{-V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

$$\cos \theta = V_1 / \bar{R} = \frac{-V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

\Rightarrow

On vérifie que \bar{R}^2 est uniformément distribuée sur $]0, 1]$ et, θ est aussi uniformément distribuée sur $]0, 2\pi]$.

FIGURE 3.1 – Le cercle \mathcal{C} de rayon $R = 1$ centré à l'origine.

⇒

De l'équation 2.3.1 et les remarques précédentes on déduit que :

on peut **générer (simuler) deux variables aléatoires (X, Y) gaussiennes standard indépendantes** en générant un autre nombre U (**random**), en choisissant $U \Leftrightarrow \bar{R}^2$ et en posant :

$$X = (-2 \ln \bar{R}^2)^{1/2} \frac{V_1}{\bar{R}} = \sqrt{\frac{-2 \ln S}{S}} V_1$$

$$Y = (-2 \ln \bar{R}^2)^{1/2} \frac{V_2}{\bar{R}} = \sqrt{\frac{-2 \ln S}{S}} V_2$$

$$\text{avec : } S = \bar{R}^2 = V_1^2 + V_2^2$$

(simulation de 2 gaussiennes standard indépendantes)

Procédure pour l'algorithme

Etape 1 : Générer les nombres aléatoires U_1 et U_2

Etape 2 : Poser $V_1 = 2U_1 - 1$, $V_2 = 2U_2 - 1$, $S = V_1^2 + V_2^2 = \bar{R}^2$

Etape 3 : Si $S > 1$ revenir à l'étape 1

Etape 4 : Produire les 2 variables aléatoires normales standard indépendantes

$$X = \sqrt{\frac{-2 \ln S}{S}} V_1, \quad Y = \sqrt{\frac{-2 \ln S}{S}} V_2$$

Remarque sur le temps de calcul

Comme la probabilité de trouver un point du carré à l'intérieur du cercle est égale à :

$$P[z \in \mathcal{C}] = \frac{\text{Aire cercle}}{\text{Aire carré}} = \frac{\pi}{4}$$

⇒ en moyenne la méthode des coordonnées polaires nécessite $4/\pi \simeq 1,273$ itérations de l'étape 1

⇒ besoin de 2,546 nombres aléatoires, 1 *logarithme*, 1 racine carrée, 1 division et 2,546 multiplications pour générer 2 variables aléatoires normales standard indépendantes.

Exercice :

- i). Simuler (avec la méthode des “polaires” 2 variables aléatoires gaussiennes standard : $X : \mathcal{N}(0, 1)$. et $Y : \mathcal{N}(0, 1)$.. et faire une estimation de la moyenne et de la variance . Comparer vos résultats avec les valeurs théoriques de ces paramètres.
- ii). Faire pareil pour 2 variables aléatoires Normales : $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$., et $Y : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$..de paramètres $\mu = 10$; $\sigma = 2$
- iii). Pour les mêmes paramètres comparer vos résultats avec ceux de la 1^{re} méthode (application du théorème limite centrale à un échantillon de variables U_i (Random)).

La comparaison doit s’effectuer par rapport à :

- a) La précision des estimations, b) La vitesse de convergence vers la bonne estimation.