

E.I.S.T.I. – Département Mathématiques
1^{ère} Année Ingénieurs
PROBABILITES II
T.D. 1 – Transformation de variables aléatoires

Exercice 0

Déterminer les fonctions caractéristiques et génératrices des lois usuelles et en déduire les moments d'ordre un et deux.

Exercice 1

On dit que Y une variable aléatoire continue est de loi Lognormale de paramètres μ et σ^2 si la variable aléatoire $X=\ln Y$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 .

- 1) Déterminer le support de Y.
- 2) Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de la fonction de répartition de X puis en fonction de la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$.
- 3) Montrer alors que la fonction de densité de Y est

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- 4) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

La taille (en millimètre) de grains de sable produits par une entreprise est une variable aléatoire de une loi Lognormale de paramètres $\mu=0,05$ et $\sigma^2=0,01$.

- 5) Calculer la proportion des grains ayant une taille inférieure à 1 millimètre.
- 6) Déterminer la taille moyenne des grains.

Exercice 2

La quantité annuelle de précipitations (en cm) dans une certaine région est distribuée selon une loi normale X d'espérance $\mu=140$ et de variance $\sigma^2=16$.

- 1) Quelle est la probabilité pour que la quantité de précipitations soit comprise entre 138 et 144 ?
- 2) Déterminer la quantité de précipitations q pour que $P(X>q)=0.2$.

Avec le dérèglement climatique, les scientifiques prévoient que la quantité de précipitations dans dix ans sera distribuée selon une nouvelle variable aléatoire définie par

$$Y=X^2.$$

- 3) Déterminer le support de Y.
- 4) Calculer la fonction de répartition de Y (F_Y) en fonction de celle de X (F_X).
- 5) En déduire la fonction de densité de Y.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-3,3]$. On définit alors

$$Y = |X|.$$

- 1) Définir le support de Y .
- 2) Déterminer sa fonction de densité.

Exercice 4

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

On note D_{X_1} (resp. D_{X_2}) le support de X_1 (resp. X_2), et F_1 (resp. F_2) la fonction de répartition associée à X_1 (resp. X_2).

- 1) On définit une nouvelle variable aléatoire par $Y = \max(X_1, X_2)$. Quel est le support de Y ?
Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de F_1 et F_2 .
- 2) Soit maintenant la variable aléatoire $Z = X_1 + X_2$.
 - (a) Quel est le support de Z ?
 - (b) Exprimer la fonction génératrice des moments de Z en fonction de celles de X_1 et X_2 .
 - (c) Calculer $P(Z=0)$, $P(Z=1)$, $P(Z=2)$.
 - (d) Déterminer la fonction de masse associée à Z .

On rappelle la formule du binôme de Newton : $(a + b)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i a^i b^{k-i}$