



CHAPITRE 2 : CONVERGENCES D'UNE SUITE DE VARIABLES ALEATOIRES

Table des matières

1.	Convergence en loi.....	1
1.1.	Définition.....	1
1.2.	Théorème de la limite centrale.....	2
1.3.	Applications du théorème de la limite centrale.....	2
2.	Convergence en probabilités.....	3
2.1.	Définition.....	3
2.2.	Loi faible des grands nombres.....	3
3.	Convergence presque sûre.....	4
3.1.	Définition.....	4
3.2.	Loi forte des grands nombres.....	4
4.	Convergence en moyenne quadratique.....	5
5.	Divers.....	5
5.1.	Convergence d'une fonction de variables aléatoires.....	5
5.2.	Liens entre les différentes convergences.....	5

1. CONVERGENCE EN LOI

1.1. Définition

Soient l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et une suite de variables aléatoires X_1, \dots, X_n sur (Ω, \mathcal{A}) . Notons F_1, \dots, F_n les fonctions de répartition correspondantes. On dit que la suite $\{X_1, \dots, X_n\}$ converge *en loi* vers une variable aléatoire X de fonction de répartition F si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t) = F(t)$$

pour tout t appartenant au domaine de continuité de F . Ce type de convergence est noté

$$X_n \xrightarrow{L} X$$

Remarque : Nous avons vu en probabilités 1 que la loi binomiale converge en loi vers une loi de Poisson.

1.2. Théorème de la limite centrale

Théorème (théorème de la limite centrale)

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telle que $E(X_i) = \mu$ et $\text{var}(X_i) = \sigma^2$. Alors la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma},$$

converge en loi vers une variable aléatoire Y de la normale centrée réduite,

$$\begin{aligned} Y_n &\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i &\xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \end{aligned}$$

Ce théorème joue un rôle capital en statistique car l'étude de somme de variables aléatoires indépendantes est primordial.

Exemple 1

Un camion peut transporter une charge maximale de 10 tonnes. Il doit livrer des lots de marchandise dont le poids est une variable aléatoire d'espérance 95 kg et d'écart-type 2kg. Combien peut-il livrer de lot pour être certain à 99% de ne pas dépasser sa charge maximale ?

1.3. Applications du théorème de la limite centrale

Convergence de la loi binomiale vers la loi normale

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi binomiale $b(n, p)$, alors

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1).$$

En pratique, on utilise cette approximation lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Convergence de la loi de Poisson vers la loi normale

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $P(\lambda)$, alors

$$\frac{X_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1).$$

En pratique, on utilise cette approximation lorsque $\lambda \geq 20$.

Dans les deux cas, on approche une loi discrète par une loi continue. Le calcul de la probabilité $P(X=k)$ ne peut donc se faire que par encadrement et en général on utilise l'approximation,

$$P(X=k) \approx P\left(k - \frac{1}{2} < X < k + \frac{1}{2}\right).$$

C'est ce qu'on appelle la correction de continuité.

Exemple 2

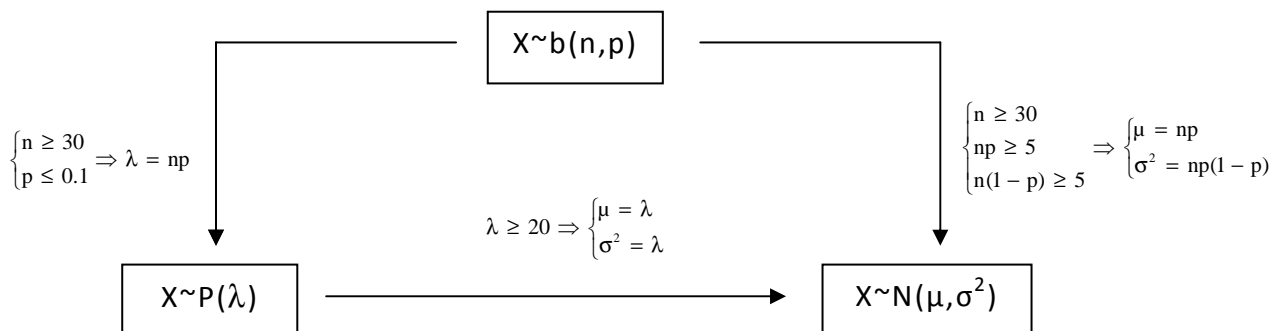
Soit un échantillon de loi binomiale $b(50, 0.40)$. La valeur exacte pour

$$P(X=20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 19) = 0.1145.$$

On a n assez grand et $np=20$ et $n(1-p)=12$, on peut donc considérer que X suit une loi normale $N(12.5 ; 3.06^2)$, d'où

$$P(X=20) \approx P(19.5 < X < 20.5) = P(-0.144 < Z < 0.144) = 0.1114$$

où Z suit une loi $N(0,1)$. L'erreur d'approximation est d'autant plus grand que la taille de l'échantillon est petite.



2. CONVERGENCE EN PROBABILITES

2.1. Définition

Soit l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Une suite de variables aléatoires X_1, \dots, X_n sur (Ω, \mathcal{A}) converge *en probabilités* vers une variable aléatoire X si

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0.$$

Ce type de convergence est noté

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

Exemple 3

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires continues de fonction de densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}.$$

Alors (X_n) converge en probabilité vers 0.

2.2. Loi faible des grands nombres

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires pas nécessairement indépendantes telles que $E(X_i)$ existe. On dit que la suite obéit à la loi faible des grands nombres si la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) = E(\bar{X}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i),$$

converge en probabilité 0.

Théorème

Si X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telle que $E(X_i) = \mu$, alors la suite obéit à la loi faible des grands nombres, i.e

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \mu.$$

Exemple 4

Soit X le nombre de clients se présentant à un guichet entre 10h et 12h. Alors X suit une loi de Poisson $P(\lambda)$. Comment déterminer λ à partir des observations journalières X_1, \dots, X_n ? Les variables aléatoires X_i sont i.i.d. telles que $E(X_i) = \lambda$, donc d'après la loi des grands nombres

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} \lambda.$$

La moyenne des observations donne ainsi une valeur approchée de λ .

3. CONVERGENCE PRESQUE SURE

3.1. Définition

Soit l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Une suite de variables aléatoires X_1, \dots, X_n sur (Ω, \mathcal{A}) converge *presque sûrement* vers une variable aléatoire X si

$$P\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X\right] = 1.$$

Ce type de convergence est noté

$$X_n \xrightarrow[p.s.]{} X$$

3.2. Loi forte des grands nombres

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires pas nécessairement indépendantes telles que $E(X_i)$ et $\text{var}(X_i)$ existent. On dit que la suite obéit à la loi forte des grands nombres si la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) = \bar{X} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i),$$

converge presque sûrement vers 0.

Théorème

Si X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telle que $E(X_i) = \mu$ et $\text{var}(X_i) = \sigma^2$, alors la suite obéit à la loi forte des grands nombres, i.e

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[p.s.]{} \mu.$$

4. CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE

Soit l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et une suite de variables aléatoires X_1, \dots, X_n sur (Ω, \mathcal{A}) telles que $E(X_i)$ et $E(X_i^2)$ existent. On dit que la suite converge *en moyenne quadratique* vers une variable aléatoire X si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[(X_n - X)^2] = 0.$$

Ce type de convergence est noté

$$X_n \xrightarrow{\text{m.q.}} X$$

Exemple 5

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d de loi de Bernoulli $B(p)$. Alors la suite (T_n) définie par

$$T_n = \frac{K_n}{n}, \text{ où } K_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

converge en moyenne quadratique vers p .

5. DIVERS

5.1. Convergence d'une fonction de variables aléatoires

Soit g une fonction continue de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}^m et (X_n) une suite de variables aléatoires convergente vers X , alors la suite $(g(X_n))$ converge vers $g(X)$ et ce quel que soit le mode de convergence.

Exemple

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de loi $N(0, \sigma^2)$ alors d'après la loi des grands nombres

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} E(X_i^2) = \sigma^2$$

On peut en déduire que la suite $(\sqrt{T_n})$ converge en probabilité vers l'écart-type σ .

5.2 Liens entre les différentes convergences

