

INTRODUCTION AUX PROBABILITES VII-VIII-IX-X-XI-XII

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2012-2013

Table des matières

	Probabilités	1
7	Indépendance des variables aléatoires	1
1	Variables aléatoires indépendantes	1
2	Variables aléatoires dépendantes	1
1	Covariance de deux variables aléatoires X_1, X_2	2
3	Echantillon	2
8	Transformations de variables aléatoires $X \rightarrow Y = \varphi(X)$	3
1	Transformations	3
2	Espérance d'une variable aléatoire transformée	5
9	Fonctionnelle Génératrice	
	Fonction Caractéristique	7
1	Fonctionnelle génératrice des moments : M_X	7
1	Définition et Exemple	7
2	Série entière de $M_X(t)$ et moments de X	7
3	Unicité de la fonction Génératrice	8
2	Fonction caractéristique Φ_X	8
1	Cas continu	9
2	Cas discret	9
10	Convergence d'une suite de variables aléatoires	11
1	11
1	Convergence en probabilité	11
2	Convergence en moyenne quadratique	11
3	Convergence presque sûre	12
2	Lois des grands nombres	12
1	Loi forte (resp. Loi faible) des grands nombres	12
2	Convergence en loi	13
3	Th. "Limite Centrale"	14
4	Th. de De Moivre- Laplace	14
11	Vecteurs aléatoires	17
1	Vecteurs aléatoires de dimension 2	17
1	Définition	17
2	Mesure de Probabilité - Fonction de répartition conjointe	17
3	Fonction de répartition marginale	18
4	Espérance mathématique (cas général : $h(X, Y)$)	18
5	Indépendance	19
6	Covariance (définition)	19

Chapitre 7

Indépendance des variables aléatoires

1 Variables aléatoires indépendantes

Définition 1.1

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ donc $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B})$
On dit que X, Y sont indépendantes si quelque soit le couple de boréliens B_i, B_j , on a :

$$P[\{X \in B_i\} \cap \{Y \in B_j\}] = P[\{X \in B_i\}]P[\{Y \in B_j\}]$$

Autrement : la loi de probabilité P_{XY} du couple (X, Y) est égale au produit des lois P_X et P_Y :

$$P_{XY} = P_X P_Y$$

Définition 1.2 (Généralisation)

Soient $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ une famille de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ donc

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n\} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

On dit que ces variables aléatoires sont indépendantes si quelque soient les boréliens B_1, \dots, B_n , on a :

$$P\left[\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right] = \prod_{i=1}^n P[\{X_i \in B_i\}]$$

Théorème 1.1

Si deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$(P[\{X_1 \in A\} \cap \{X_2 \in B\}] = P[\{X_1 \in A\}] P[\{X_2 \in B\}])$$

$$\Rightarrow E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2)$$

Remarque 1.1

Attention : La réciproque n'est pas toujours vraie !

2 Variables aléatoires dépendantes

Définition 2.1

$$\begin{aligned} P[\{X_i \in A_i\} \cap \{X_j \in A_j\}] &= P[X_i \in A_i | \{X_j \in A_j\}] P[\{X_j \in A_j\}] \\ &\Leftrightarrow P[\{X_i X_j\} \in A] \quad A = "A_i \cap A_j" \end{aligned}$$

1 Covariance de deux variables aléatoires X_1, X_2

Définition 2.2

$$\text{cov}[X_1, X_2] = E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] = E[X_1 X_2] - \mu_{X_1} \mu_{X_2}$$

Remarque 2.1

Quand X_1 et X_2 sont indépendantes, d'après le théorème précédent :

$$E[X_1, X_2] = E[X_1] E[X_2] \Rightarrow \text{cov}[X_1, X_2] = 0$$

Théorème 2.1

Soient X_k , avec $k \in \{1, \dots, p\}$, variables aléatoires et, a_k, b_k , avec $k \in \{1 \dots p\}$, une suite de nombres réels alors :

$$\Rightarrow \text{var} \left[\sum_{k=1}^p a_k X_k + b_k \right] = \sum_{k=1}^p a_k^2 \text{var} [X_k] + \sum_{i \neq j} a_i a_j \text{cov} [X_i X_j]$$

Théorème 2.2

Soient X_k , avec $k \in \{1, \dots, p\}$, variables aléatoires indépendantes et, a_k, b_k , avec $k \in \{1 \dots p\}$, une suite de nombres réels alors :

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{k=1}^p a_k X_k + b_k \right] &= \sum_{k=1}^p a_k E [X_k] + b_k \\ \text{var} \left[\sum_{k=1}^p a_k X_k + b_k \right] &= \sum_{k=1}^p a_k^2 \text{var} [X_k] \end{aligned}$$

3 Echantillon

Définition 3.1 (échantillon)

On définit un échantillon par les données suivantes.

1. Le n-uplet de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) indépendantes qui suivent la même loi de probabilités avec paramètres (μ, σ^2) .
2. X une variable aléatoire abstraite appelée *variable aléatoire parente*, (qui suit la même loi) avec paramètres (μ, σ^2)
3. $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique de l'échantillon, qui vérifie les propriétés :

$$E[\bar{X}] = \mu \quad \text{var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Chapitre 8

Transformations de variables aléatoires

$$X \rightarrow Y = \varphi(X)$$

1 Transformations

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire et une application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

ou

$$\Omega \xrightarrow{\varphi(X)} \mathbb{R}.$$

On pose

$$Y = \varphi(X)$$

alors :

Proposition 1.1

Y est une variable aléatoire si et seulement si

$$\forall b \in \mathbb{R} \{x : \varphi(x) \leq b\} \in \mathcal{R}.$$

Si S_X est le support (continu ou discret) de X , alors $\varphi(S_X)$ est le support de Y .

Théorème 1.1 ($\varphi(S_X)$ discret)

Soit X une var. aléatoire discrète avec support D_X , fonction de masse p_X et une application :

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire.

$\Rightarrow Y$ est une variable aléatoire discrète avec : support $D_Y = \varphi(D_X)$

et fonction de masse :

$$p_Y(y) = \begin{cases} \sum_{x \in \{\varphi(x)=y\} \cap D_X} p_X(x) & \text{si } y \in D_Y \\ 0 & \text{si } y \notin D_Y \end{cases}$$

Théorème 1.2 ($\varphi(C_X)$ discret)

Soit X une var. aléatoire continue avec support C_X et fonction de densité f_X . Soit une application :

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire. et $\varphi(C_X)$ un ensemble discret.

$$\Rightarrow Y \text{ est une variable aléatoire discrète avec support } D_Y \subseteq \varphi(C_X)$$

et fonction de masse

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int_{\{\varphi(x)=y\} \cap C_X} f_X(x) & \text{si } y \in \varphi(C_X) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Théorème 1.3 ($\varphi(C_X)$ continu, φ monotone)

Soit X une var. aléatoire continue avec support C_X et fonction de densité f_X . Soit une application

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonction monotone (strictement croissante ou décroissante) et telle que :

$$Y = \varphi(X) \text{ variable aléatoire et } \varphi^{-1} = \psi$$

(l'image inverse) admet une dérivée continue,

$$\Rightarrow$$

Y est une var. aléatoire continue avec support $C_Y = \varphi(C_X)$

et fonction de densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin C_Y \\ f_X(\psi(y))|\psi'(y)| & \text{si } y \in C_Y \end{cases}$$

Remarque 1.1

Si la fonction n'est pas monotone, l'image inverse n'a pas de dérivée.

Théorème 1.4 (Généralisation φ pas monotone)

Soit X une var. aléatoire continue avec support C_X et fonction de densité f_X . Soit une application :

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\forall x \in C_X$ φ dérivable et $\varphi'(x) \neq 0$ sauf en un nombre fini de points et,

$\forall y \in \mathbb{R}$ il existe $m(y)$ points $x_1(y), x_2(y), \dots, x_m(y) \in C_X$ tels que

$$\forall k = 1 \dots m(y), \varphi(x_k(y)) = y \text{ et } \varphi'(x_k(y)) \neq 0$$

ou il n'existe pas de points $x \in C_X$ tels que

$$\varphi(x) = y \text{ et } \varphi'(x) \neq 0 \text{ et on pose : } m(y) = 0$$

$$\Rightarrow Y = \varphi(X) \text{ est une variable aléatoire continue avec}$$

$$\text{support } C_Y = \varphi(C_X)$$

et fonction de densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m(y)} f_X(x_k(y)) |\varphi'(x_k(y))|^{-1} & \text{si } m(y) > 0 \\ 0 & \text{si } m(y) = 0 \end{cases}$$

2 Espérance d'une variable aléatoire transformée

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $Y = \varphi(X)$ variable aléatoire (Variable al. transformée de X)

1. Si X discrète $E[\varphi(X)] = \sum_{x \in D_X} \varphi(x) p_X(x)$

2. Si X continue avec f_X fonction de densité $E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x) dx$

Il faut assurer la convergence dans les deux cas :

existence \Leftrightarrow convergence absolue de la série ou de l'intégrale au sens de Lebesgue.

Théorème 2.1

Soient : X variable aléatoire

$\varphi_1 \dots \varphi_n$ fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que $\varphi_1(X) \dots \varphi_n(X)$ sont des var. aléatoires et $E(\varphi_i(X))$ existe
 $\forall : i = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

$$E \left[\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right] = \sum_{i=1}^n a_i E[\varphi_i(X)]$$

Chapitre 9

Fonctionnelle Génératrice Fonction Caractéristique

1 Fonctionnelle génératrice des moments : M_X

1 Définition et Exemple

Définition 1.1

Si $E[e^{tX}]$ existe $\forall t \in]t_1, t_2[$ avec $0 \in]t_1, t_2[$, on définit l'application :

$$\begin{aligned} M_X :]t_1, t_2[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto M_X(t) = E[e^{tX}]; \\ \text{avec, } M_X(0) &= 1. \end{aligned}$$

M_X est appelée fonction (ou fonctionnelle) génératrice des moments de X .
 $]t_1, t_2[$ de longueur maximale, est appelé : intervalle de définition de M_X .

Exemple 1.1 Exemple de fonction génératrice

Soit X variable aléatoire discrète avec :

Support : $D_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et fonction de masse :

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } x \in D_X \\ 0 & \text{si } x \notin D_X \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[e^{tX}] &= \sum e^{tx} p_X(x) \\ &= e^{-2t} p_X(-2) + e^{-t} p_X(-1) + p_X(0) + e^t p_X(1) + e^{2t} p_X(2) \\ &= \frac{1}{5} (e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + e^{2t}) \\ &\Rightarrow M_X(t) \text{ existe } \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2 Série entière de $M_X(t)$ et moments de X

Remarque 1.1

Souvent on calcule les moments d'une variable aléatoire à partir de $M_X(t)$ (en prenant ses dérivées) d'après le résultat suivant :

Théorème 1.1

Soit X variable aléatoire avec :

$$M_X(t) \text{ définie pour } t \in]t_1, t_2[\text{ et } t_1 < 0 < t_2$$

i) Tous les moments μ_k de X existent.

ii)

$$\forall t \in]-s, s[\text{ où, } 0 < s < t_0 = \min] - t_1, t_2[,$$

$M_X(t)$ admet un développement en série entière :

$$M_X(t) = 1 + E[X]t + \frac{E[X^2]}{2!}t^2 + \dots$$

iii) $\forall k \in \mathbb{N}^* \ E[X^k] = M_X^{(k)}(0)$: dérivée n -ième de M_X au point $t = 0$

Exemple 1.2

On avait (v. exemple précédent) : $M_X(t) = \frac{1}{5} (e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + e^{2t})$

$$M_X^{(k)}(0) = \frac{1 + 2^k}{5} ((-1)^k + 1) \text{ } k\text{-ième moment de } X$$

$$\Rightarrow E(X^k) = \begin{cases} 2 \frac{(1 + 2^k)}{5} & \text{si } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

3 Unicité de la fonction Génératrice**Théorème 1.2 (Unicité et propriétés)**

Soit X et Y , deux variables aléatoires admettant les fonctions génératrices M_X, M_Y respectivement, avec : $t \in]t_1, t_2[$ et, $t_1 < 0 < t_2$.

\Rightarrow

i) Les variables X et Y suivent la même loi de probabilité si et seulement si :

$$\forall t \in]t_1, t_2[\quad M_X(t) = M_Y(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ identiquement réparties.}$$

ii) La fonction génératrice vérifie toutes les propriétés de la transformée de Laplace (linéarité, convolution, théorème du retard etc.).

2 Fonction caractéristique Φ_X **Définition 2.1**

Soit X une variable aléatoire. On définit l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \Phi_X(\omega) = E[e^{i\omega X}] \end{aligned}$$

appelée fonction caractéristique de X .

1 Cas continu

Définition 2.2

Fonction caractéristique \Leftrightarrow Transformée de Fourier (complexe conjuguée) de la fonction de densité :

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f_X(x) dx \Leftrightarrow E[e^{i\omega X}] = \Phi_X(\omega)$$

Remarque 2.1 La fonction caractéristique vérifie toutes les propriétés de la transformée de Fourier.

Théorème 2.1

1. La linéarité.
2. L'existence d'après Lebesgue :

$$E[e^{i\omega X}] = 1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

3. Le théorème de Convolution :

$$\Phi_{X*Y}(\omega) = \Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega)$$

4. Fonction caractéristique d'une fonction linéaire :

$$\Phi_{\lambda X}(\omega) = \Phi_X(\lambda\omega)$$

$$\Phi_{X+\alpha}(\omega) = e^{i\omega\alpha}\Phi_X(\omega)$$

5. Dérivées à l'origine : $\Phi_X^{(k)}(0) = \omega^k E[X^k]$

2 Cas discret

$$\Phi_X(\omega) = E[e^{i\omega X}] = \sum_{x_i \in D_X} e^{i\omega x_i} p_X(x_i)$$

Avec la fonction δ de Dirac on définit :

$$f_X(x) = \sum_{x_i} p_X(x_i) \delta(x - x_i)$$

alors on obtient que : $\Phi_X(\omega)$ est la *transformée de Fourier discrète* :

$$\begin{aligned} \Phi_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \sum p_X(x_i) \delta(x - x_i) dx \\ &= \sum_i p_X(x_i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \delta(x - x_i) dx = \sum_i p_X(x_i) e^{i\omega x_i} \end{aligned}$$

Chapitre 10

Convergence d'une suite de variables aléatoires

1

1 Convergence en probabilité

Définition 1.1 (Convergence en probabilité)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) . Une suite de variables aléatoires $\{X_1, \dots, X_n, \dots\}$ sur (Ω, \mathcal{A}) converge en probabilité vers X (variable aléatoire : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$)

Si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P[\{|X_n - X| \geq \epsilon\}] = 0$$

notations équivalentes :

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(P)$$

Théorème 1.1 Soit (Ω, \mathcal{A}, P) . Soient $X, \{X_1, \dots\}$ variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}) , dont le second moment par rapport à l'origine existe et il est tel que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E[(X_n - X)^2] = 0$

\Rightarrow

–

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(P)$$

– Cette limite en probabilité est unique.

Pour la démonstration de ce théorème on utilise les inégalités de Kolmogorov et Tchebycheff.

2 Convergence en moyenne quadratique

Définition 1.2 (Convergence en moyenne quadratique)

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) et $X, (X_1, \dots, X_n, \dots)$ variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}) et dont le second moment μ'_2 existe

On dit que la suite X_1, \dots, X_n converge en moyenne quadratique si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[(X_n - X)^2] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(mq) \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{mq} X$$

Proposition 1.1

Si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(mq) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(P) \\ \Leftrightarrow$$

Convergence en moyenne quadratique \Rightarrow Convergence en probabilité.**3 Convergence presque sûre****Définition 1.3 (Convergence presque sûre)**

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) et $X, (X_1, \dots, X_n, \dots)$ variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}) . On dit que la suite (X_1, \dots, X_n, \dots) converge *presque sûrement* vers la variable aléatoire X si

$$P[\{\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X\}] = 1 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{p.s} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(p.s).$$

Remarque : Si $X = C$ (avec $C \in \mathbb{R}$ constante) $\Leftrightarrow X$ var. al. dégénérée en C alors on a convergence presque sûre vers C

Théorème 1.2

1- $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(p.s)$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0 : \quad \lim_{n \geq N} P[\{\sup |X_n - X| < \epsilon\}] = 1$$

2- Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(p.s) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(P)$$

2 Lois des grands nombres**1 Loi forte (resp. Loi faible) des grands nombres****Définition 2.1**

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) , et (X_1, \dots, X_n, \dots) une suite de variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{A}) pas forcément indépendantes et tel que $\forall i \quad E[X_i]$ existe.

Si la variable aléatoire transformée définie par :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n [X_i - E(X_i)]}{n} = \bar{X} - \frac{\sum E[X_i]}{n}$$

converge vers 0 suivant un mode de convergence, alors la suite obéit à la loi des grands nombres :

* Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0(P) \Rightarrow$ la suite obéit à la loi faible des grands nombres.

* Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0(p.s) \Leftrightarrow$ la suite obéit à la loi forte des grands nombres.

Théorème 2.1 (Application à un échantillon)

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) , et X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}) , suivant la même loi de probabilité et telles que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad E[X_i] = \mu, \quad \text{var}[X_i] = \sigma^2$$

existent, alors la suite $\{X_1, \dots, X_n\}$ obéit à la loi faible et aussi à la loi forte des grands nombres.

Pour la preuve de ce théorème on utilise la généralisation de l'inégalité de Tchebycheff \Leftrightarrow inégalité de Kolmogorov.

2 Convergence en loi**Définition 2.2 (Convergence en loi)**

Soient les variables aléatoires $X, \{X_1, \dots, X_n\}$ et les fonctions de répartition correspondantes, $F_X, \{F_{X_1}, \dots, F_{X_n}\}$. On dit que la suite $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ converge en loi vers X si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en tout point de continuité x de F_X .

$$\Leftrightarrow$$

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X(\mathcal{L})$$

Exemple 2.1

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$X_n : \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(t - \frac{1}{n}\right)^2}{1 + \frac{1}{n}}} dt = F_X(x)$$

On pose $z = \frac{t - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$

Théorème 2.2 (de Lévy-Cramer-Duguc)

1.

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Rightarrow \Phi_{X_n}(\omega) \rightarrow \Phi_X(\omega)$$

uniformément dans tout intervalle fini.

2.

$$\begin{aligned} \text{Si } \Phi_{X_n}(\omega) &\rightarrow \Phi(\omega) \text{ avec } \Re \Phi(\omega) \text{ continue à } \omega = 0 \\ &\Rightarrow \Phi(\omega) \text{ fonction caractéristique d'une variable aléatoire } X \\ \text{et } X_n &\xrightarrow{\mathcal{L}} X \end{aligned}$$

Remarque 2.1 *Tableau de la hiérarchie des convergences*

Conv. en moyenne quadr.

Conv. en probabilité \rightarrow Conv. en loi

Convergence presque sûre

3 Th. "Limite Centrale"**Théorème 2.3 (Théorème de la limite centrale)**

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) , et X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}) , suivant la même loi de probabilité et telles que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad E[X_i] = \mu, \quad \text{var}[X_i] = \sigma^2$$

existent,

 \Rightarrow la suite $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ où

$$Y_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)$$

converge en loi vers une variable aléatoire $Y : \mathcal{N}(0, 1)$.**4 Th. de De Moivre- Laplace****Théorème 2.4 (Théorème de De Moivre-Laplace)**

$$\mathcal{B}(n, p) \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Convergence en loi de la loi binomiale vers la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) , et X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}) , suivant la même loi de probabilité binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

 \Rightarrow

La suite $Y_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$ converge en loi vers la loi Normale centrée réduite :

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y : \mathcal{N}(0, 1)$$

Preuve :La fonction caractéristique de X_n :

$$\Phi_{X_n}(\omega) = [pe^{i\omega} + 1 - p]^n$$

$$\Rightarrow \Phi_{Y_n} = \left[pe^{\frac{i\omega}{\sqrt{npq}}} + 1 - p \right]^n \times e^{\frac{-i\omega np}{\sqrt{npq}}}$$

$$\Rightarrow \ln \Phi_{Y_n} = n \ln \left[p e^{\frac{i\omega}{\sqrt{npq}}} + 1 - p \right] - \frac{i\omega np}{\sqrt{npq}}$$

Développement limité de l'exponentiel à l'ordre 2 :

$$\Rightarrow \ln \Phi_{Y_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\simeq} n \ln \left[1 + p \left(\frac{i\omega}{\sqrt{npq}} - \frac{\omega^2}{2npq} \right) \right] - \frac{i\omega np}{\sqrt{npq}}$$

Développement limité du \ln à l'ordre 2 :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} x - \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \Phi_{Y_n}(\omega) \underset{n \rightarrow \infty}{\simeq} -\frac{\omega^2}{2q} + \frac{1}{2} \frac{p\omega^2}{q}$$

avec $q = 1 - p$

$$\Rightarrow \ln \Phi_{Y_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\simeq} -\frac{\omega^2}{2} \text{ et}$$

$$\Phi_{Y_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\simeq} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Chapitre 11

Vecteurs aléatoires

1 Vecteurs aléatoires de dimension 2

1 Définition

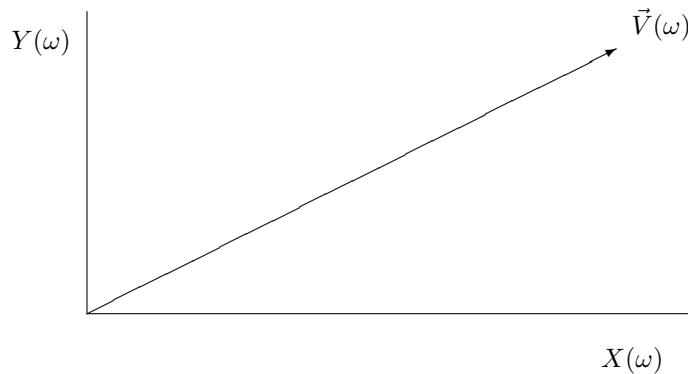
Soit un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) et soient deux variables aléatoires (X, Y) définies sur cet espace. Le vecteur aléatoire $V(X, Y)$ est défini par :

$$\begin{aligned} X &: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R} \\ Y &: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R} \\ V(X, Y) &: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \forall \omega \in \Omega &\quad \mapsto \quad V(X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

Exemple 1.1

Sur la figure on représente le vecteur aléatoire $\vec{V}(\omega) \in \mathbb{R}^2$. Et pour l'événement : $A(D) \equiv \vec{V} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$, on associe l'ensemble des pts ω t.q.

$$A(x, y) = \{\omega | X(\omega) \leq x ; Y(\omega) \leq y\}$$



2 Mesure de Probabilité - Fonction de répartition conjointe

$$F(x, y) \equiv P[\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}]$$

*** Cas continu :**

La mesure de probabilité définie par :

$$P(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

si elle existe on l'appelle **fonction de densité conjointe** (notée " $f(x, y)$ ") d'un vecteur aléatoire continu et inversement :

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y P(x', y') dx' dy' \\ \Updownarrow \\ (f(x', y'))$$

*** Cas discret - fonction de masse conjointe :**

(i)

$$P[x_i, y_j] \equiv P[\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}]$$

et $\forall D \in \mathbb{R}^2$ fonction de répartition

$$P[D] = \sum_{(x_i, y_j) \in D} P[x_i, y_j]$$

3 Fonction de répartition marginale*** Cas continu :**

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') dx' dy'$$

et fonction de densité marginale \Leftrightarrow (dériv. par rapport à x)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

*** Cas discret**

Fonction de masse marginale

$$Px_i = \sum_{y_j} P(x_i y_j)$$

Fonction de répartition marginale

$$F_X(x_i) = F[x_i, +\infty[\\ \downarrow \\ y_j \in] - \infty, +\infty[$$

4 Espérance mathématique (cas général : $h(X, Y)$)*** Cas continu :**

$$E[h(X, Y)] = \iint h(x, y) f(x, y) dx dy$$

* Cas discret :

$$E[h(X, Y)] = \sum_{x_i, y_j} h(x_i, y_j) P(x_i, y_j)$$

Propriétés

(a) Si $h(x, y) = x + y$

$$E[h(X, Y)] = E[X] + E[Y]$$

(b) Si $h(x, y) = xy \Rightarrow$ en général

$$E[(X \cdot Y)] \neq E[X]E[Y]$$

5 Indépendance

Théorème 1.1 (Indépendance) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Deux variables aléatoires X, Y sont indépendantes

ii) la fonction de répartition conjointe se factorise en produit de fonctions de répartition marginales :

$$\Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

iii) La fonction de densité (resp. fonction de masse) conjointe se factorise en produit de fonctions de densité (resp. de masse) marginales :

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$P(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$$

Corollaire

Pour deux variables aléatoires (X, Y) indépendantes on a le résultat suivant :

$$E[(X \cdot Y)] = E[X]E[Y]$$

mais : **Remarque importante**

Cette factorisation peut se produire même si X, Y ne sont pas indépendantes (liées).

6 Covariance (définition)

$$\text{Cov}(X, Y) \equiv E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

ou \Rightarrow

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

(i) Corollaire

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

si X, Y sont non corrélées

(ii) "Inégalité de Schwartz"

$$\text{Cov}^2(X, Y) \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2$$

\Leftrightarrow

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sigma_X \sigma_Y$$

e) **Coefficient de corrélation (de X, Y)** déf.

$$C \equiv \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

en général

$$|C| \leq 1$$

* Si $C = 0 \Leftrightarrow$ var. al. X, Y non corrélées.

* Si $|C| = 1$ (C peut-être aussi < 0) $\Leftrightarrow X, Y$ **complètement corrélées**.