

**E.I.S.T.I. – Département Mathématiques**  
**1<sup>ère</sup> Année Ingénieurs**  
**PROBABILITES II**

***T.D. 2 – Convergences d'une suite de variables aléatoires***

DEFINITIONS DES CONVERGENCES

Exercice 1

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur  $[0,1]$ . On note

$$Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

- 1) Montrer que  $n(1 - Y_n)$  converge en loi.
- 2) Montrer que  $Y_n$  converge en moyenne quadratique vers 1.

Exercice 2

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = 0.$$

- 1) Montrer que  $X_n$  converge en moyenne quadratique vers  $a$ .
- 2) Montrer que  $X_n$  converge en probabilité vers  $a$ .

Exercice 3

Soit  $(Y_n)$  une suite de variables aléatoires définies sur  $\{0, n\}$  telles que

$$P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad P(Y_n = n) = \frac{1}{n}.$$

- 1) Montrer que  $Y_n$  ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.
- 2) Montrer que  $Y_n$  converge en probabilité vers 0.

Exercice 4

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires i.i.d. On note

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

- 1) Montrer que si  $X_n$  suit une loi  $N(0,1)$  alors  $S_n$  converge en probabilité vers 1.
- 2) Si  $X_n$  suit une loi  $N(\mu, \sigma^2)$ , trouver la limite en probabilité de  $S_n$ .

APPLICATIONS DES THEOREMES « LIMITE »

Exercice 5

Les statistiques récentes de certains vétérinaires passionnés ont montré que parmi les beaux chats d'Angora le pourcentage d'avoir un oeil bleu et l'autre vert est de 0,01.

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de chats aux yeux bicolores dans un échantillon de 200 chats d'Angora choisis au hasard.

- a) En formalisant le problème d'après une variable aléatoire discrète, calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins deux chats aux yeux bicolores dans l'échantillon.
- b) Une formalisation d'après une variable aléatoire discrète différente (approximation de la précédente) serait-elle possible ? Si oui, calculer de nouveau la probabilité demandée en a).

Exercice 6

Toto a constaté que souvent parmi 100 e-mails qu'il reçoit, il y en a un qui est à rejeter. Soit  $X_n$  la variable aléatoire qui représente le nombre de « mauvais e-mails » parmi  $n$  reçus.

Déterminer une valeur de  $n$  à partir de laquelle Toto aura plus de 10 mauvais e-mails dans sa boîte avec une probabilité de  $2/3$ .

#### Exercice 7

Considérons  $n$  mesures indépendantes  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de l'énergie moyenne  $\mu$  d'un faisceau de particules à l'intérieur d'un accélérateur. Supposons que chacune de ces mesures suit une loi d'espérance  $\mu$  et d'écart-type 1. On utilise la moyenne  $\bar{X}$  comme estimateur de  $\mu$ . Déterminer le nombre minimal de mesures à affecter afin que l'erreur d'estimation soit inférieure à 0,095 avec une probabilité de 0,9.

#### Exercice 8

Suite à un sondage on constate qu'un habitant sur 200 utilise Internet. Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre d'habitants utilisant Internet dans une ville de 80 000 habitants comme Pau.

- a) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ? Quelle est la probabilité pour que plus de 10 000 habitants utilisent Internet?
- b) Par quelle autre loi pouvez-vous modéliser  $X$  ? Recalculer la probabilité précédente.