

E.I.S.T.I. – Département Mathématiques
1^{ère} Année Ingénieurs
PROBABILITES II
T.D. 3 – Couples de variables aléatoires

Exercice 1

Soient $k \geq 2$ un paramètre et (X, Y) un couple de variables aléatoires de fonction de densité conjointe

$$f(x, y) = \begin{cases} k(k-1)(y-x)^{k-2} & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- 1) Montrer que f est une fonction de densité pour tout paramètre $k \geq 2$.
- 2) Déterminer les deux fonctions de densité marginales.
- 3) Les variables sont-elles indépendantes ?
- 4) Calculer $P(X \leq \frac{1}{4} | Y > \frac{1}{2})$

Exercice 2

Soient X et Y les proportions de sable et de limon dans un sol. On suppose que le couple (X, Y) admet une fonction de densité constante sur le domaine de variation du couple.

- 1) Déterminer la fonction de densité du couple.
- 2) Calculer la probabilité d'avoir plus de sable que de limon.
- 3) Dédurre de la question 1 les fonctions de densité marginales.
- 4) Calculer la probabilité d'avoir plus de la moitié de sable.

Exercice 3

Dans une ville américaine où les rues sont soit parallèles, soit perpendiculaires, les interventions d'une caserne de pompiers couvrent une zone qui a été définie comme étant l'ensemble des points de la ville pour lesquels la distance parcourue par les pompiers est inférieure à 2 kilomètres. Si l'on suppose que les incendies se déclarent au hasard dans cette zone, quelle sera la distance moyenne que devront parcourir les pompiers pour atteindre le lieu d'incendie ?

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$. On note les variables aléatoires U et V définies par $U=X+Y$ et $V=X/Y$.

- 1) Déterminer la loi du couple (U, V) .
- 2) Les variables U et V sont-elles aussi indépendantes ?

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 1

Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{k}{(xy)^2} & \text{si } x > y > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la fonction de densité conjointe du vecteur aléatoire (X,Y) .

- 1) Déterminer la constante k .
- 2) Déterminer la loi marginale de X .
- 3) Calculer $P(Y > 2 \mid X > 3)$.

Exercice 2

On considère un système constitué de deux composants placés en parallèle et qui fonctionnent indépendamment. C'est-à-dire que les deux composants fonctionnent en même temps mais un seul suffit pour faire fonctionner le système.

On suppose que T_i , la durée de vie (en heures) du composant i , pour $i=1,2$, suit une loi $\text{Exp}(\frac{1}{2})$. Alors la durée de vie du système T est égale à

$$T = \max\{T_1, T_2\}.$$

- 1) Calculer la probabilité que le système fonctionne moins de 3 heures sachant que la durée de vie du composant 1 est supérieure à 2 heures.
- 2) Démontrer que la fonction de répartition conjointe du couple (T, T_1) est égale à

$$F(t, t_1) = \begin{cases} F_{T_1}(t_1) \times F_T(t) & \text{si } t \geq t_1 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $F_{T_i}(t)$ est la fonction de répartition de T_i .

- 3) En déduire la fonction de densité conjointe.

Exercice 3

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de lois $N(\mu_1, 1)$ et $N(\mu_2, 1)$ respectivement, et telles que le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X_2 soit égal à ρ et de fonction de densité (vecteur gaussien)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(x_1-\mu_1)^2 - 2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) + (x_2-\mu_2)^2]}$$

Notons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1^2, x_2 + x_1) \end{aligned}$$

Déterminer la loi du couple $(Y_1, Y_2) = \varphi(X_1, X_2)$.