



# CHAPITRE 1 : TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALEATOIRES

## Table des matières

1.	Transformations.....	1
1.1.	Cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes .....	1
1.2.	Cas où X est une v.a continue et Y est une v.a. discrète .....	1
1.3.	Cas où X et Y sont des variables aléatoires continues .....	2
2.	Espérance d'une variable aléatoire transformée .....	3
2.1.	Cas où X est une variable aléatoire discrète .....	3
2.2.	Cas où X est une variable aléatoire continue .....	3

## 1. TRANSFORMATIONS

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. Soient X une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  avec  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$  et  $\varphi$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose alors  $Y = \varphi(X)$  et on suppose que Y est une variable aléatoire.

### 1.1. Cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète de support  $D_X$  et de fonction de masse  $p_X$ , alors Y est une variable aléatoire discrète de support  $D_Y = \varphi(D_X)$  et de fonction de masse

$$p_Y(y) = \begin{cases} \sum_{x \in \{x, \varphi(x)=y\} \cap D_X} p_X(x) & \text{si } y \in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

### 1.2. Cas où X est une v.a continue et Y est une v.a. discrète

Si X est une variable aléatoire continue de support  $D_X$  et de fonction de densité  $f_X$ . Si de plus  $\varphi(D_X)$  est un ensemble discret, alors Y est une variable aléatoire discrète de support  $D_Y = \varphi(D_X)$  et de fonction de masse

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int_{x \in \{x, \varphi(x)=y\} \cap D_X} f_X(x) dx & \text{si } y \in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

### 1.3. Cas où X et Y sont des variables aléatoires continues

Supposons que X soit une variable aléatoire continue de support  $D_X$  et de fonction de densité  $f_X$  et de fonction de répartition  $F_X$ . On suppose de plus que l'application  $\varphi$  est dérivable. On cherche  $f_Y$  et  $F_Y$  les fonctions de densité et répartition de la variable  $Y=\varphi(X)$  de support  $D_Y=\varphi(D_X)$ .

#### Cas où $\varphi$ est strictement monotone

Si  $\varphi$  est strictement monotone, elle est bijective, donc  $\varphi^{-1}$  existe.

- Si  $\varphi$  est strictement croissante, on a  $F_X(t)=P(X<t)=P(Y<\varphi(t))=F_Y(\varphi(t))$ , d'où  

$$F_Y(t)=F_X(\varphi^{-1}(t)).$$

En dérivant  $F_X(x)=F_Y(\varphi(x))$  de chaque coté, on obtient  $f_X(x)=\varphi'(x)\times f_Y(\varphi(x))$ , soit

$$f_Y(y)=\frac{f_X(x)}{\varphi'(x)}=\frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}.$$

- Si  $\varphi$  est strictement décroissante, on a  $F_X(x)=P(X<x)=P(Y>\varphi(x))=1-F_Y(\varphi(x))$ , d'où

$$F_Y(x)=1-F_X(\varphi^{-1}(x)).$$

En dérivant  $F_X(t)=1-F_Y(\varphi(x))$  de chaque coté, on obtient  $f_X(x)=-\varphi'(x)\times f_Y(\varphi(x))$ , soit

$$f_Y(y)=-\frac{f_X(x)}{\varphi'(x)}=-\frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}.$$

On obtient donc la forme générale,

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} & \text{si } y \in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

#### Exemple

Soit  $\varphi$  la fonction exponentielle, donc  $\varphi$  est strictement croissante et  $\varphi^{-1}$  est la fonction logarithme. Alors la variable aléatoire  $Y=\varphi(X)$  a son support inclus dans  $\mathbb{R}_+$  et pour fonction de densité,

$$f_Y(y)=\frac{f_X(\ln(y))}{\exp(\ln(y))}=\frac{f_X(\ln(y))}{y}$$

Par exemple si X une variable aléatoire continue de loi exponentielle de paramètre 2,

$$f_X(x)=\begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors

$$f_Y(y)=\begin{cases} 2y^{-3} & \text{si } y \geq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq y < 1 \end{cases}.$$

On peut remarquer que Y est bien une variable aléatoire et que  $\int_0^{+\infty} f_Y(y)dy=1$ .

### Cas où $\varphi$ est quelconque

Le principe est le même mais il est difficile de le traiter de façon général. On cherche toujours à identifier la fonction de répartition  $F_Y(y)$  en cherchant l'antécédent pour  $X$  de l'événement  $Y < y = \varphi(x)$ .

Par exemple, si  $Y = X^2$  avec  $X$  définie sur  $\mathbb{R}$ , alors

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

En dérivant, on obtient

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})).$$

## 2. ESPERANCE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE TRANSFORMEE

### 2.1. Cas où $X$ est une variable aléatoire discrète

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète de support  $D_X$  et de fonction de masse  $p_X$ , on rappelle que

$$E[\varphi(X)] = \sum_{x \in D_X} \varphi(x) p_X(x).$$

En particulier, la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$M_X(t) = \sum_{k \in D_X} e^{tk} p_X(k),$$

et sa fonction caractéristique est donnée par

$$\Phi_X(w) = \sum_{k \in D_X} e^{i w k} p_X(k).$$

### 2.2. Cas où $X$ est une variable aléatoire continue

Si  $X$  est une variable aléatoire continue de support  $D_X$  et de fonction de densité  $f_X$ , on rappelle que

$$E[\varphi(X)] = \int_{D_X} \varphi(x) f_X(x) dx.$$

En particulier, la fonction génératrice d'une variable aléatoire continue est définie par

$$M_X(t) = \int_{D_X} e^{tx} f_X(x) dx,$$

et sa fonction caractéristique est donnée par

$$\Phi_X(w) = \int_{D_X} e^{i w x} f_X(x) dx.$$

Remarque : Dans les deux cas, il faut s'assurer de la convergence sauf pour la fonction caractéristique qui converge toujours.