CHAPITRE 1 : TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALEATOIRES

Table des matières

1. TRANSFORMATIONS

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé. Soient X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A})$ avec $X(\Omega)\subset\mathbb{R}$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose alors $Y=\varphi(X)$ et on suppose que Y est une variable aléatoire.

1.1. Cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète de support D_X et de fonction de masse p_X, alors Y est une variable aléatoire discrète de support $D_Y=\varphi(D_X)$ et de fonction de masse

$$p_Y(x)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in\{x,\varphi(x)=y\}\cap D_X} p_X(x) & \text{si } y\in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.2. Cas où X est une v.a continue et Y est une v.a. discrète

Si X est une variable aléatoire continue de support D_X et de fonction de densité f_X. Si de plus $\varphi(D_X)$ est un ensemble discret, alors Y est une variable aléatoire discrète de support $D_Y=\varphi(D_X)$ et de fonction de masse

$$p_Y(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_{x\in\{x,\varphi(x)=y\}\cap D_X} f(x)dx & \text{si } y\in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.3. Cas où X et Y sont des variables aléatoires continues

Supposons que X soit une variable aléatoire continue de support D_X et de fonction de densité f_X et de fonction de répartition F_X. On suppose de plus que l'application φ est dérivable. On cherche f_Y et F_Y les fonctions de densité et répartition de la variable $Y=\varphi(X)$ de support $D_Y=\varphi(D_X)$.

Cas où φ est strictement monotone

Si φ est strictement monotone, elle est bijective, donc φ^{-1} existe.

- Si φ est strictement croissante, on a $F_X(t)=P(X<t)=P(Y<\varphi(t))=F_Y(\varphi(t))$, d'où
$$F_Y(t)=F_X\left(\varphi^{-1}(t)\right).$$
En dérivant $F_X(x)= F_Y(\varphi(x))$ de chaque coté, on obtient $f_X(x)=\varphi'(x)\times f_Y\left(\varphi(x)\right)$, soit
$$f_Y(y)=\frac{f_X(x)}{\varphi'(x)}=\frac{f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)}.$$
- Si φ est strictement décroissante, on a $F_X(x)=P(X<x)=P(Y>\varphi(x))=1-F_Y(\varphi(x))$, d'où
$$F_Y(x)=1-F_X\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$
En dérivant $F_X(t)= 1-F_Y(\varphi(x))$ de chaque coté, on obtient $f_X(x)=-\varphi'(x)\times f_Y\left(\varphi(x)\right)$, soit
$$f_Y(y)=-\frac{f_X(x)}{\varphi'(x)}=-\frac{f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)}.$$

On obtient donc la forme générale,
$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)}{\left|\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right|} & \text{si } y\in D_Y\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Exemple

Soit φ la fonction exponentielle, donc φ est strictement croissante et φ^{-1} est la fonction logarithme. Alors la variable aléatoire $Y=\varphi(X)$ a son support inclus dans $\mathbb{R}_+$ et pour fonction de densité,
$$f_Y(y)=\frac{f_X\left(\ln(y)\right)}{\exp\left(\ln(y)\right)}=\frac{f_X\left(\ln(y)\right)}{y}$$
Par exemple si X une variable aléatoire continue de loi exponentielle de paramètre 2,
$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
alors
$$f_Y(y)=\begin{cases}2y^{-3} & \text{si } y\geq 1\\ 0 & \text{si } 0\leq y<1\end{cases}.$$
On peut remarquer que Y est bien une variable aléatoire que $\int_0^{+\infty} f_Y(y)dy=1$.

Cas où φ est quelconque

Le principe est le même mais il est difficile de le traiter de façon général. On cherche toujours à identifier la fonction de répartition $F_Y(y)$ en cherchant l'antécédent pour X de l'événement $Y<y=\varphi(x)$.

Par exemple, si $Y=X^2$ avec X définie sur $\mathbb{R}$, alors

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(X^2<y)=P(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

En dérivant, on obtient

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right).$$

2. ESPERANCE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE TRANSFORMEE

2.1. Cas où X est une variable aléatoire discrète

Si X est une variable aléatoire discrète de support D_X et de fonction de masse p_X, on rappelle que

$$E[\varphi(X)]=\sum_{x\in D_X}\varphi(x)p_X(x).$$

En particulier, la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$M_X(t)=\sum_{k\in D_X}e^{tk}p_X(k),$$

et sa fonction caractéristique est donnée par

$$\Phi_X(w)=\sum_{k\in D_X}e^{iwk}p_X(k).$$

2.2. Cas où X est une variable aléatoire continue

Si X est une variable aléatoire continue de support D_X et de fonction de densité f_X, on rappelle que

$$E[\varphi(X)]=\int_{D_X}\varphi(x)f_X(x)dx.$$

En particulier, la fonction génératrice d'une variable aléatoire continue est définie par

$$M_X(t)=\int_{D_X}e^{tx}f_X(x)dx,$$

et sa fonction caractéristique est donnée par

$$\Phi_X(w)=\int_{D_X}e^{iwx}f_X(x)dx.$$

Remarque : Dans les deux cas, il faut s'assurer de la convergence sauf pour la fonction caractéristique qui converge toujours.

EXERCICES

Exercice 0

Déterminer les fonctions caractéristiques et génératrices des lois usuelles et en déduire les moments d'ordre un et deux.

Exercice 1

On dit que Y une variable aléatoire continue est de loi Lognormale de paramètres μ et σ^2 si la variable aléatoire X=lnY suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.

1) Déterminer le support de Y.
2) Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de la fonction de répartition de X puis en fonction de la fonction de répartition de la loi normale N(0,1).
3) Montrer alors que la fonction de densité de Y est

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)^2} & \text{si } y>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

4) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

La taille (en millimètre) de grains de sable produits par une entreprise est une variable aléatoire de une loi Lognormale de paramètres μ=0,05 et σ^2=0,01.

5) Calculer la proportion des grains ayant une taille inférieure à 1 millimètre.
6) Déterminer la taille moyenne des grains.

Exercice 2

La quantité annuelle de précipitations (en cm) dans une certaine région est distribuée selon une loi normale X d'espérance μ=140 et de variance σ^2=16.

1) Quelle est la probabilité pour que la quantité de précipitations soit comprise entre 138 et 144 ?
2) Déterminer la quantité de précipitations q pour que P(X>q)=0.2.

Avec le dérèglement climatique, les scientifiques prévoient que la quantité de précipitations dans dix ans sera distribuée selon une nouvelle variable aléatoire définie par

$$Y=X^2.$$

3) Déterminer le support de Y.
4) Calculer la fonction de répartition de Y (F_Y) en fonction de celle de X (F_X).
5) En déduire la fonction de densité de Y.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. On définit alors

$$Y=|X|.$$

1) Définir le support de Y.
2) Déterminer sa fonction de densité.

Exercice 4

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1+\lambda_2=1$.
On note D_{X_1} (resp. D_{X_2}) le support de X_1 (resp. X_2), et F_1 (resp. F_2) la fonction de répartition associée à X_1 (resp. X_2).

1) On définit une nouvelle variable aléatoire par $Y=\max(X_1,X_2)$. Quel est le support de Y ? Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de F_1 et F_2.
2) Soit maintenant la variable aléatoire $Z=X_1+X_2$.
   (a) Quel est le support de Z ?
   (b) Exprimer la fonction génératrice des moments de Z en fonction de celles de X_1 et X_2.
   (c) Calculer $P(Z=0)$, $P(Z=1)$, $P(Z=2)$.
   (d) Déterminer la fonction de masse associée à Z.

On rappelle la formule du binôme du Newton : $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i}$