E.I.S.T.I. – Département Mathématiques

1ère Année Ingénieurs

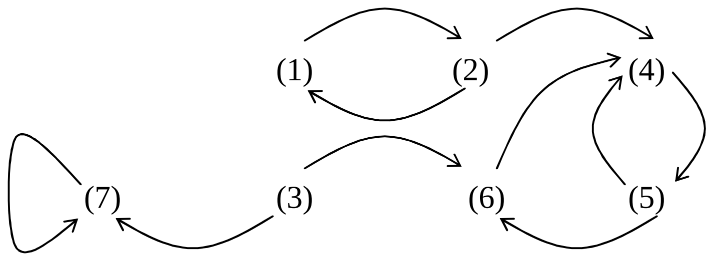
PROBABILITES T.D. 4

Chaines de Markov

NATURE DES ETATS – COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Exercice 1

Une chaîne de Markov est définie par le graphe suivant où chaque flèche indique une probabilité de transition non nulle. Déterminer les classes et la nature des classes. La chaîne est-elle ergodique ?



Exercice 2

L'observation du développement d'un organisme animal au cours du temps fait apparaître l'ensemble des états suivants : juvénile, maturité sexuelle, sénescence et décès., que nous noterons (j), (m), (s) et (d), avec les probabilités de transition données par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.55 & 0.15 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les classes et la nature des classes. Que pouvez-vous dire concernant la distribution stationnaire ? La chaîne est-elle irréductible ? La chaîne est-elle ergodique ?

Exercice 3

Soit la matrice stochastique

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer de deux façons différentes que la chaîne de Markov définie par P est ergodique. Calculer alors sa distribution limite (régime permanent).

Exercice 4

Pour quelles valeurs de α ($0 \le \alpha \le 1$), la chaîne de Markov définie par la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle ergodique ?

Exercice 5

Doudou le hamster paresseux ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange, et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut, soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire.

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il va soit manger, soit faire de l'exercice au hasard.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il part faire de l'exercice mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatiguant, il a donc 80% de chance de retourner dormir au bout d'une minute, sinon il continue.

Supposons qu'à la première minute, Doudou soit en train de dormir.

1) Quelle chance y a-t-il pour que Doudou mange après deux minutes ?
2) Combien de temps Doudou passe-t-il à dormir ?

Exercice 6

Soit un dispositif technique comprenant deux éléments montés en parallèle et fonctionnant indépendamment l'un de l'autre. Chaque élément a une fiabilité p au cours d'une journée, *i.e* une probabilité 1-p de tomber en panne. Il n'y a pas de possibilité de réparation.

Soit X_n le nombre d'éléments en panne au début de la $n^{ème}$ journée.

1) Justifier que $\{X_n\}$ est une chaîne de Markov. Quels états peut-elle prendre ? Tracer le graphe et donner la matrice de transition.
2) i) On suppose qu'au premier jour, tous les éléments fonctionnent. Calculer la loi du système à l'instant n.
   ii) Si on considère que les éléments ont une fiabilité de 90%, calculer la probabilité pour que les deux éléments fonctionnent toujours au début du $10^{ème}$ jour (idem avec 95% et 99%).
3) Combien y-a-t'il de distributions stationnaires ? Déterminer les (la).
4) La chaîne est-elle ergodique ? Si oui quelle est la distribution limite.