E.I.S.T.I. – Département Mathématiques
1ère Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D. 1
Transformée de variables aléatoires

Exercice 1

On dit que Y une variable aléatoire continue est de loi Lognormale de paramètres μ et σ^2 si la variable aléatoire X=lnY suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.

a) Déterminer le support de Y.
b) Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de la fonction de répartition de X puis en fonction de la fonction de répartition de la loi normale N(0,1).
c) Montrer alors que la fonction de densité de Y est

$$f_Y(y)\begin{cases} \dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln y-\mu}{\sigma})^2} & \text{si } y>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

d) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

La taille (en millimètre) de grains de sable produits par une entreprise est une variable aléatoire de une loi Lognormale de paramètres μ=0,05 et σ^2=0,01.

e) Calculer la proportion des grains ayant une taille inférieure à 1 millimètre.
f) Déterminer la taille moyenne des grains.

Exercice 2

La quantité annuelle de précipitations (en cm) dans une certaine région est distribuée selon une loi normale X d'espérance μ=140 et de variance σ^2=16.

i) Quelle est la probabilité pour que la quantité de précipitations soit comprise entre 138 et 144 ?
ii) Déterminer la quantité de précipitations q pour que P(X>q)=0.2.
iii) Avec le dérèglement climatique, les scientifiques prévoient que la quantité de précipitations dans dix ans sera distribuée selon une nouvelle variable aléatoire définie par $Y=X^2$.
 a) Déterminer le support de Y.
 b) Calculer la fonction de répartition de Y (F_Y) en fonction de celle de X (F_X).
 c) En déduire la fonction de densité de Y.

Exercice 3

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1+\lambda_2=1$.

On note D_{X_1} (resp. D_{X_2}) le support de X_1 (resp. X_2), et F_1 (resp. F_2) la fonction de répartition associée à X_1 (resp. X_2).

1. On définit une nouvelle variable aléatoire par $Y=\max(X_1,X_2)$. Quel est le support de Y ? Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de F_1 et F_2.
2. Soit maintenant la variable aléatoire $Z=X_1+X_2$.
 a) Quel est le support de Z ?
 b) Exprimer la fonction génératrice des moments de Z en fonction de celles de X_1 et X_2.
 c) Calculer P(Z=0), P(Z=1), P(Z=2).
 d) Déterminer la fonction de masse associée à Z.

On rappelle la formule du binôme du Newton : $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i}$