INTRODUCTION AUX PROBABILITES
IX-X-XI

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

Table des figures

Chapitre 9

Indépendance de deux variables aléatoires

1 Variables aléatoires indépendantes

Définition 1.1

Soient $X,\ Y$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathcal{P})$ donc $(X,\ Y) : (\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathcal{P}) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \mathcal{B})$
On dit que $X,\ Y$ sont indépendantes si quelque soit le couple de boréliens $B_i,\ B_j$, on a :

$$P[\{X \in B_i\} \cap \{Y \in B_j\}] = P[\{X \in B_i\}]P[\{Y \in B_j\}]$$

Autrement : *la loi de probabilité P_{XY} du couple $(X,\ Y)$ est égale au produit des lois P_X et P_Y :*

$$P_{XY} = P_X\ P_Y$$

Théorème 1.1 (indépendance)

Deux variables aléatoires $X,\ Y$ sont indépendantes si et seulement si la fonction de répartition $H(x,\ y) = P[\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}]$ est égale au produit des fonctions de répartitions $F_X(x),\ G_Y(y)$ (appelées fonctions de répartition marginales)

$$\Leftrightarrow H(x,\ y) = F_X(x)\ G_Y(y)$$

Théorème 1.2

Si deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes :
$(P[\{X_1 \in A\} \cap \{X_2 \in B\}] = P[\{X_1 \in A\}]\ P[\{X_2 \in B\}])$

$$\Rightarrow\ E(X_1,\ X_2) = E(X_1)\ E(X_2)$$

Remarque 1.1

Attention : *La réciproque n'est pas toujours vraie !*

2 Variables aléatoires dépendantes

Définition 2.1

$$\begin{array}{lll} P[\{X_i \in A_i\} \cap \{X_j \in A_j\}] & = P[X_i \in A_i] | \{X_j \in A_j\}] & P[\{X_j \in A_j\}] \\ & \Leftrightarrow \;\; P[\{X_i X_j\} \in A] & A = \text{``}A_i \cap A_j'' \end{array}$$

1 Covariance de deux variables aléatoires $X_1,\ X_2$

Définition 2.2

$$cov[X_1,\ X_2] = E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] = E[X_1 X_2] - \mu_{X_1}\mu_{X_2}$$

Remarque 2.1

Quand X_1 et X_2 sont indépendantes, d'après le théorème précédent :
$E[X_1,\ X_2] = E[X_1]\ E[X_2]$

$$\Rightarrow \quad cov[X_1,\ X_2] = 0$$

Théorème 2.1

Soient X_k, avec $k \in \{1,\ \dots\ p\}$, variables aléatoires et, $a_k,\ b_k$, avec $k \in \{1\ \dots\ p\},$ une suite de nombres réels alors :

$$\Rightarrow var\left[\sum_{k=1}^{p} a_k X_k + b_k\right] = \sum_{k=1}^{p} a_k^2 var\left[X_k\right] + \sum_{i \neq j} a_i a_j cov\left[X_i X_j\right]$$

Théorème 2.2

Soient X_k, avec $k \in \{1,\ \dots\ p\}$,, variables aléatoires indépendantes et, $a_k,\ b_k$, avec $k \in \{1\ \dots\ p\},$ une suite de nombres réels alors :

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{p} a_k X_k + b_k\right] &= \sum_{k=1}^{p} a_k E\left[X_k\right] + b_k \\ var\left[\sum_{k=1}^{p} a_k X_k + b_k\right] &= \sum_{k=1}^{p} a_k^2 var\left[X_k\right] \end{aligned}$$

3 Echantillon

Définition 3.1 (échantillon)

On définit un échantillon par les données suivantes.

1. Le n-uplet de variables aléatoires $(X_1,\ \dots,\ X_n)$ indépendantes qui suivent la même loi de probabilités avec paramètres $(\mu,\ \sigma^2)$.
2. X une variable aléatoire abstraite appelée *variable aléatoire parente,* (qui suit la même loi) avec paramètres $(\mu,\ \sigma^2)$
3. $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ *la moyenne empirique de l'échantillon,* qui vérifie les propriétés :

$$E[\bar{X}] = \mu \qquad var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Chapitre 10

Inégalités de Tchebycheff

1

Théorème 1.1 *Soient* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ *et* X *variable aléatoire sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$
Si $h : \mathbb{R} \to [0,\ +\infty[$ *tel que* $h(X)$ *variable aléatoire et* $E[h(X)]$ *existe*

$$\Rightarrow \forall k > 0\ P[\{h(X)\} \geq k] \leq \frac{E[h]}{k}$$

Théorème 1.2
Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ *et* X *variable aléatoire sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$ *avec* $(\mu_X,\ \sigma_X^2)$ *données*

$$\Rightarrow$$

1. $\forall\ \delta > 0\ P[\{|X - \mu_X| \geq \delta\sigma_X\}] \leq \dfrac{1}{\delta^2}$
2. $\forall\ \delta > 0\ P[\{|X - \mu_X| < \delta\sigma_X\}] \geq 1 - \dfrac{1}{\delta^2}$
3. (a) $\forall\ \epsilon > 0\ P[\{|X - \mu_X| \geq \epsilon\}] \leq \dfrac{\sigma_X^2}{\epsilon^2}$

   (b) $\forall\ \epsilon > 0\ P[\{|X - \mu_X| < \epsilon\}] \geq 1 - \dfrac{\sigma_X^2}{\epsilon^2}$

Chapitre 11

Convergence d'une suite de variables aléatoires

1

1 Convergence en probabilité

Définition 1.1 (Convergence en probabilité)
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$. Une suite de variables aléatoires $\{X_1,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots\}$ sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$ converge en probabilité vers X (variable aléatoire : $\Omega \to \mathbb{R}$)
Si :

$$\forall\ \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} P[\{|X_n - X| \geq \epsilon\}] = 0$$

notations équivalentes :

$$X_n \xrightarrow{P} X \qquad \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n = X(P)$$

Théorème 1.1 *Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$. Soient X, $\{X_1,\ \ldots\}$ variables aléatoires définies sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$, dont le second moment par rapport à l'origine existe et il est tel que :* $\lim_{n\to+\infty} E[(X_n - X)^2] = 0$

$$\Rightarrow$$

–

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X(P)$$

– *Cette limite en probabilité est unique.*

Pour la démonstration de ce théorème on utilise les inégalités de Kolmogorov et Tchebycheff.

2 Convergence en moyenne quadratique

Définition 1.2 (Convergence en moyenne quadratique)
Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ et $X,\ (X_1,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots)$ variables aléatoires définies sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$ et dont le second moment μ_2' existe
On dit que la suite $X_1,\ \ldots,\ X_n$ *converge en moyenne quadratique* si

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[(X_n - X)^2\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n = X(mq) \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{mq} X$$

Proposition 1.1
Si :

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = X(mq) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} X_n = X(P)$$
$$\Leftrightarrow$$

Convergence en moyenne quadratique $\Rightarrow$ *Convergence en probabilité.*

3 Convergence presque sûre

Définition 1.3 (Convergence presque sûre)
Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ et $X,\ (X_1,\ \dots,\ X_n,\ \dots)$ variables aléatoires définies sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$. On dit que la suite $(X_1,\ \dots,\ X_n,\ \dots)$ converge *presque sûrement vers la variable aléatoire* X si

$$P[\{\lim_{n \to +\infty} X_n = X\}] = 1 \Leftrightarrow X_n \underset{p.s}{\to} X \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} X_n = X(p.s).$$

Remarque : Si $X = C$ *(avec* $C \in \mathbb{R}$ *constante)* $\Leftrightarrow$ X *var. al. dégénérée en* C alors on a convergence presque sûre vers C

Théorème 1.2

1- $\lim_{n \to +\infty} X_n = X(ps)$ *si et seulement si*

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \exists\ N > 0 : \quad \lim_{n \geq N} P[\{\sup |X_n - X| < \epsilon\}] = 1$$

2- *Si*

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = X(p.s) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} X_n = X(P)$$

2 Lois des grands nombres

1 Loi forte (resp.Loi faible) des grands nombres

Définition 2.1
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, et $(X_1,\ \dots,\ X_n,\ \dots)$ une suite de variables aléatoires sur$(\Omega,\ \mathcal{A})$ pas forcément indépendantes et tel que $\forall\ i\ \ E[X_i]$ existe.
Si la variable aléatoire transformée définie par :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} [X_i - E(X_i)]}{n} = \bar{X} - \frac{\sum E[X_i]}{n}$$

converge vers 0 suivant un mode de convergence, alors la suite obéit à la loi des grands nombres :

* Si $\lim_{n \to +\infty} Y_n = 0(P) \Rightarrow$ la suite obéit à la loi faible des grands nombres.

* Si $\lim_{n \to +\infty} Y_n = 0(p.s) \Leftrightarrow$ la suite obéit à la loi forte des grands nombres.

Théorème 2.1 (Application à un échantillon)
Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, *et* $X_1,\ X_2,\ \dots\ X_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$, *suivant la même loi de probabilité et telles que :*

$$\forall\ i \in \{1,\ 2, \dots\ \ n\}\ \ E[X_i] = \mu,\ \ var[X_i] = \sigma^2$$

existent, alors la suite $\{X_1,\ \dots,\ X_n\}$ *obéit à la loi faible et aussi à la loi forte des grands nombres.*

Pour la preuve de ce théorème on utilise la généralisation de l'inégalité de Tchebycheff $\Leftrightarrow$ inégalité de Kolmogorov.

2 Convergence en loi

Définition 2.2 (Convergence en loi)
Soient les variables aléatoires $X,\ \{X_1,\ \dots\ X_n\}$ et les fonctions de répartition correspondantes, $F_X,\ \{F_{X_1},\ \dots\ F_{X_n}\}$. On dit que la suite $\{X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n\}$ *converge en loi vers* X si

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en tout point de continuité x de F_X.

$$\Leftrightarrow$$

$$X_n \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} X \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} X_n = X(\mathcal{L})$$

Exemple 2.1

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$X_n : \mathcal{N}\left(\frac{1}{n},\ 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{n}\right)} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(t-\frac{1}{n}\right)^2}{1+\frac{1}{n}}} dt = F_X(x)$$

On pose $z = \dfrac{t - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$

Théorème 2.2 (de Lévy-Cramer-Duguc)

1.
$$X_n \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} X \Rightarrow \Phi_{X_n}(\omega) \rightarrow \Phi_X(\omega)$$

uniformément dans tout intervalle fini.

2.
$$\begin{aligned} \textit{Si } \Phi_{X_n}(\omega) \quad & \rightarrow \Phi(\omega) \textit{ avec } \Re\Phi(\omega) \textit{ continue à } \omega = 0 \\ & \Rightarrow \Phi(\omega) \textit{ fonction caractéristique d'une variable aléatoire} X \\ & \textit{et} \quad X_n \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} X \end{aligned}$$

Remarque 2.1 *Tableau de la hiérarchie des convergences*

$$\begin{array}{lcl} \text{Conv. en moyenne quadr.} & & \\ & \searrow & \\ & & \text{Conv. en probabilité} \;\rightarrow\; \text{Conv. en loi} \\ & \nearrow & \\ \text{Convergence presque sûre} & & \end{array}$$

3 Th. "Limite Centrale"

Théorème 2.3 (Théorème de la limite centrale)

Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, *et* $X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$, *suivant la même loi de probabilité et telles que :*

$$\forall\ i \in \{1,\ 2, \ldots\ \ n\}\ \ E[X_i] = \mu,\ \ var[X_i] = \sigma^2$$

existent,

$$\Rightarrow$$

la suite $Y_1,\ Y_2,\ \ldots, Y_n,\ \ldots$ *où*

$$Y_n = \sqrt{n}\ \ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)$$

converge en loi vers une variable aléatoire $Y : \mathcal{N}(0,\ 1)$.

4 Th. de De Moivre- Laplace

Théorème 2.4 (Théorème de De Moivre-Laplace)

$$\mathcal{B}(n,\ p) \rightarrow \mathcal{N}(0,\ 1)$$

Convergence en loi de la loi binomiale vers la loi $\mathcal{N}(0,\ 1)$.

Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, *et* $X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$, *suivant la même loi de probabilité binomiale* $\mathcal{B}(n,\ p)$.

$$\Rightarrow$$

La suite $Y_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$ *converge en loi vers la loi Normale centrée réduite :*

$$Y_n \underset{n \to \infty}{\overset{\mathcal{L}}{\rightarrow}} Y : \mathcal{N}(0,\ 1)$$

Preuve :

La fonction caractéristique de X_n :

$$\Phi_{X_n}(\omega) = \left[pe^{j\omega} + 1 - p\right]^n$$

$$\Rightarrow \Phi_{Y_n} = \left[pe^{\dfrac{j\omega}{\sqrt{npq}}} + 1 - p \right]^n \times e^{\dfrac{-j\omega np}{\sqrt{npq}}}$$

$$\Rightarrow \ln \Phi_{Y_n} = n \ln \left[p e^{\frac{j\omega}{\sqrt{npq}}} + 1 - p \right] - \frac{j\omega np}{\sqrt{npq}}$$

Développement limité de l'exponentiel à l'ordre 2 :

$$\Rightarrow \ln \Phi_{Y_n} \underset{n\to\infty}{\simeq} n \ln \left[1 + p \left(\frac{j\omega}{\sqrt{npq}} - \frac{\omega^2}{2npq} \right) \right] - \frac{j\omega np}{\sqrt{npq}}$$

Développement limité du $\ln$ à l'ordre 2 :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\simeq} x - \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{Y_n}(\omega) \underset{n\to\infty}{\simeq} -\frac{\omega^2}{2q} + \frac{1}{2}\frac{p\omega^2}{q}$$

avec $q = 1 - p$

$\Rightarrow \ln \Phi_{Y_n} \underset{n\to\infty}{\simeq} -\frac{\omega^2}{2}$ et

$$\Phi_{Y_n} \underset{n\to\infty}{\simeq} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0,\ 1)$.