E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.1
le 10 novembre 2009

1

i) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et si $\forall\, i \geq 1 \;\; A_i \in \; \mathcal{A}$ alors

$$\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$$

ii) Soit $\{\mathcal{A}_i \quad i \in I\}$ une famille de tribus sur Ω où I est un ensemble d'indices quelconque. Montrer que $\bigcap_i \; \mathcal{A}_i$ est aussi une tribu sur Ω.

iii). Soient $A,\; B$ sous-ensembles de Ω.

a) Décrire la tribu engendrée par A . Justifier votre réponse.

b) Décrire la tribu engendrée par A et B. Justifier votre réponse.

2

i) On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé et on observe les faces supérieures présentées après le lancer. En désignant les faces de la pièce par Π (pile) et F (face)respectivement et celles du dé par $1,\; 2,\; 3,\; 4,\; 5,\; 6$, déterminer l'espace échantillon (espace des états ou ensemble fondamental) associé à cette expérience aléatoire.

ii) Même question que précédemment pour l'expérience suivante : On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne 6 pour la troisième fois et l'on observe le nombre de lancers nécessaires pour atteindre ce but .

iii) Même question que précédemment pour l'expérience suivante : Pendant une période de temps donnée, on compte le nombre d'automobiles traversant le poste de péage d'un pont.

iv) Pour l'expérience du ii) décrire les sous-ensembles de Ω correspondant aux événements suivants :

a) Le troisième 6 apparaît au septième lancer.

b) Le troisième 6 est obtenu après le septième lancer mais avant le douzième.

c) Le troisième 6 n'est pas obtenu durant les cinq premiers lancers.

3

On lance deux dés et on observe le nombre de points sur la face supérieure de chaque dé. Représenter les événements suivants par les sous ensembles de l'espace échantillon.

i) Le nombre de points sur chaque face est supérieur à 3.

ii) Le nombre total de points est 8.

iii) Le nombre total de points est supérieur à 9.

iv) Sur chaque face, il y a un nombre pair de points .

v) Sur l'une des faces, il y a un nombre pair de points et, sur l'autre il y a plus de cinq points.

4

En utilisant les opérations de réunion d'intersection et de complément, représenter les événements suivants.

i) Au moins un des événements A, B se réalise.

ii) Les événements A, B se réalisent.

iii) Exactement un des événements A, B se réalise.

iv) Aucun des énénements A, B ne se réalise.

v) Au moins un des événements A, B, C se réalise.

vi) Au moins deux des événements A, B, C se réalisent.

vii) Exactement un des événements A, B, C ne se réalise pas.

viii) Exactement un des événements A, B, C se réalise .

ix) Aucun des événements A, B, C ne se réalise .

x) A ne se réalise pas mais au moins un des événements B, C se réalise.

xi) Les événements A, B, C se réalisent.

5

Pour un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

$$\text{si : } P[A] = 0,3, \;\; P[B] = 0,2 \text{ et } \;\; P[A \cap B] = 0,1$$

déterminer les probabilités des événements suivants :

i) Au moins un des événements A, B se réalise.

ii) Aucun des événements A, B ne se réalise.

iii) A ne se réalise pas mais B se réalise .

iv) Exactement un des événements A, B se réalise.

6

Supposons que pour un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on a :

$$P[A] = \frac{1}{2}, \;\; P[B] = P[C] = \frac{1}{6},$$

où A, B, et C sont mutuellement exclusifs.

Evaluer les probabilités suivantes :

- a) $P[A^c \cap B^c]$;
- b) $P[A^c \cap B^c \cap C^c]$;
- c) $P[A^c \cap B^c \cap C]$;
- d) $P[B - A]$;
- e) La probabilité qu' exactement un des événements A, B et C se réalise.

7

Pour un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si $\{A_1, A_2, ...\}$ est une suite finie ou dénombrable d'événements appartenant à $\mathcal{A}$,

i) Montrer l'inégalité de Boole :

$$P[\bigcup_i A_i] \leq \sum_i P[A_i]$$

ii) Montrer l'inégalité :

$$P[\bigcap_i A_i] \geq 1 - \sum_i P[A_i^c]$$

8

Supposons que pour un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on a :

$$P[A] = \frac{1}{2}, \ \ P[B] = 0,1, \ P[C] = 0,3.$$

Si possible trouver la valeur exacte des probabilités suivantes.

Sinon, à partir de l'information disponible, déterminer les meilleures bornes inférieures et supérieures possibles et justifier vos conclusions.

- a) $P[B^c]$;
- b) $P[B \cup C]$;
- c) $P[A^c \cup B^c]$;
- d) $P[B \cap C] + P[B^c \cap C]$;
- e) $P[A \cap B^c]$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.2
le 17 novembre 2009

1

i) On s'intéresse au nombre de clients passants à une station de service durant une période de temps indéterminée.
Pour cette expérience aléatoire construire un espace probabilisé en définissant :

$$\forall \text{ événement élémentaire } \omega \in \Omega, \quad P[\{\omega\}] = \frac{e^{-1}}{\omega!}.$$

(Vérifier que P est une mesure de probabilité).
Calculer la probabilité de l'événement A suivant :
$A =${“ au plus un client”}

ii)
Pour la même expérience définir la “probabilité élémentaire” par :

$$\forall \text{ événement élémentaire } \omega \in \Omega, \quad P[\{\omega\}] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\omega}}{\omega!},$$

où λ est un nombre réel positif.
Vérifier si P est vraiment une mesure de probabilité.

2

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes déterminer un espace échantillon permettant l'utilisation du modèle uniforme.

i) La répartition du sexe dans les familles comptant n enfants.

ii) Le lancer d'un dé équilibré n fois.

iii) Une main de k cartes distinctes d'un jeu de 52 cartes :
$(1 \leq k \ \leq 52)$.

iv) La répartition de 6 erreurs de frappe dans un texte de 7000 mots.

v) On analyse la répartition des accidents d'automobiles sur les ponts de la Seine au centre de Paris entre 10 heures et 11 heures chaque jour de la semaine.
On supposera que durant cette heure 3 accidents se produisent chaque jour de la semaine et qu'il n'arrive jamais plus d'un accident dans la même seconde.

3

Supposons que le modèle uniforme régisse l'expérience aléatoire consistant à engendrer les nombres
$00, 01, ..., 99$.
(On interprétera le nombre $0X$ comme étant X). Déterminer la probabilité des événements suivants :

i) Le nombre est supérieur à 81.

ii) Le nombre est inférieur à 31 et impair .

iii) Le nombre est divisible par 7 .

4

i) On lance un dé non truqué 12 fois. Quelle est la probabilité pour l'événement A défini par :
A = {"chaque face du dé se présente exactement deux fois"}

ii) Dans une urne contenant n boules distinctes, on choisit p boules au hasard et avec remise. Quelle est la probabilité pour l'événement A défini par :
A = {"toutes les boules choisies sont distinctes"}.

5

On choisit au hasard 3 jockeys parmi 10 afin de participer aux trois premières courses d'un programme.

Déterminer la probabilité :

a) que les trois jockeys soient différents,

b) qu'un jockey participe à exactement deux courses,

c) que le même jockey participe aux trois courses.

6

On choisit au hasard et avec remise 4 chiffres parmi $\{0, 1, ..., 9\}$.

Trouver la probabilité qu'un résultat contienne :

a) aucune répétition (4 chiffres différents),

b) une répétition (une paire et deux chiffres distincts),

c) deux répétitions (trois chiffres identiques ou deux paires),

d) trois répétitions (le même chiffre répété quatre fois).

7

a .) Un professeur distribue au hasard à ses 5 élèves leurs copies de devoirs.

Déterminer la probabilité pour que :

- i) chacun des 5 élèves reçoive la copie portant son nom.
- ii) l'élève Pierre reçoive sa copie.
- iii) l'élève Pierre et l'élève Paul reçoivent leur copie respective.
- iv) l'élève Pierre ou l'élève Paul reçoive sa copie.

b.) Dans un bureau le polycopieur tombe en panne 6 fois durant une semaine de 5 jours.

On s'intéresse à la répartition des pannes parmi les jours de la semaine en supposanrt que celles-ç se produisent au hasard.

En utilisant le modèle uniforme , calculer la probabilité de l'événement :

$$A = \text{"On a au moins une panne chaque jour"}$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.3
le 24 novembre 2009

1

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n$ d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$ telle que : $P[B_1 \cap B_2 \ldots, \cap B_{n-1}] > 0$.

Montrer que :

$$P[\bigcap_{i=1}^{n} B_i] = P[B_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i]\ P[B_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} B_i] \ldots P[B_2|B_1]\ P[B_1]$$

2

On considère M cellules distinctes.

On distribue au hasard N boules dans les cellules $(N \leq M)$ et on s'intéresse à l'événement A :

$$A = \{\text{“les } N \text{ premières cellules sont occupées”}\}.$$

Calculer (d'après le modèle uniforme) la probabilité $P[A]$ dans les cas suivants :

a.1) Les N boules sont distinctes et on accepte plus d'une boule dans une même cellule.

a.2) Les N boules sont distinctes et on n'accepte pas plus d'une boule dans une même cellule.

b.1) Les N boules sont identiques et on accepte plus d'une boule dans une même cellule.

b.2) Les N boules sont identiques mais on ne permet pas la répétition des boules dans une cellule.

3

On lance un dé et on associe à cette expérience aléatoire l'espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ avec la mesure de probabilité P définie par :

ω	1	2	3	4	5	6
$P[\{\omega\}]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Considérer les événements A et B définis par :

A = {“un résultat inférieur à 5” } ;

B = { “un résultat pair ” } Déterminer l'espace de probabilité conditionnelle par rapport à B, $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$, et calculer la probabilité conditionnelle $P[A|B]$.

4

On tire au hasard deux des chiffres de 1 à 9 . Sachant que la somme obtenue est paire, calculer la probabilité P pour que les deux chiffres soient impairs.

5

- **i)**
  Soient : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité , X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et F_X, p_x , la fonction de répartition et la fonction de masse correspondantes. Montrer les propriétés suivantes :

  a) $0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

  b) F_X est non décroissante.

  c) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad et \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

  d) F_X est continue à droite.

  e) $\lim_{y \to x,\ y<x} F_X(y) = F_X(x) - p_X(x)$.

- **ii)**
  Soient : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité , X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et F_X, p_x , la fonction de répartition et la fonction de masse correspondantes. Montrer les propriétés suivantes (calcul de la probabilité pour que X prenne une valeur dans un intervalle quelconque à l'aide de F_X et de p_x) pour tout $a,\ b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$:

  a) $P_X[\,]a,\ b]\,] = F_X(b) - F_X(a)$;

  b) $P_X[\,]a,\ b[\,] = F_X(b) - F_X(a) - p_X(b)$

  c) $P_X[\,[a,\ b[\,] = F_X(b) - F_X(a) + p_X(a) - p_X(b)$

  d) $P_X[\,[a,\ b]\,] = F_X(b) - F_X(a) + p_X(a)$

  e) $P_X[\,]a,\ \infty[\,] = 1 - F_X(a)$

  f) $P_X[\,[a,\ \infty[\,] = 1 - F_X(a) + p_X(a)$

  g) $P_X[\,]-\infty,\ b[\,] = F_X(b) - p_X(b)$

6

Soit l'expérience aléatoire de l' observation du temps de fonctionnement T (en jours) d'une certaine machine **avant la première panne**. On lui associe l'espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ avec :

$$\Omega = [0,\ +\infty[; \quad \mathcal{A} = \mathcal{R}_{[0,+\infty[}$$

et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on définit la probabilité :

$$P[A] = \frac{1}{5} \int_A \exp(-\frac{t}{5})dt$$

i) Soit B l'événement :

{"plus de 8 jours de fonctionnement avant la première panne"}.

Calculer la probabilité $P[B]$.

Si la machine fonctionne depuis 8 jours sans panne, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne entre 10 et 12 jours sans panne ?

ii) Soit D l'événement :

{"plus de 10 jours de fonctionnement avant la première panne"}.

Calculer la probabilité $P[D|B]$.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.4
le 2 décembre 2009

1

i)

Soient les événements :

A= {“une famille a des enfants des deux sexes”} et

B= {“une famille a au plus un garçon”}

a) Montrer que A et B sont des événements indépendants si une famille a trois enfants.

b) Montrer que A et B sont des événements dépendants si une famille a deux enfants.

ii) On jette trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

Considérons les événements :

A = {“le premier jet donne face”} ;

B = {“le second jet donne face”} ;

C = {“deux jets consécutifs donnent face”}

Etudier l’indépendance ou dépendance (deux à deux) de ces événements.

2

i) Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\mathbb{R}, \ \mathcal{R})$ avec fonction de densité f_X symétrique par rapport à un point $c \in \mathbb{R}$.

Montrer que si l’espérance μ_X existe alors $\mu_X = c$

ii) Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\mathbb{R}, \ \mathcal{R})$, et telle que la fonction $h(c) = E[(X-c)^2]$ existe pour tout $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction h admet un minimum pour $c = \mu_x$.

iii)

– a) Soit X la variable aléatoire qui représente la note des étudiants à un examen. Si la moyenne et l’écart type sont 74 et 12 respectivement, calculer les résultats en unités centrées réduites des étudiants ayant obtenu les notes :

$$65; \quad 74; \quad 86; \quad 92.$$

– b) Reprendre l’expérience précédente, et calculer les notes correspondantes aux résultats centrés réduits suivants :

$$-1; \quad 0,5; \quad 1,25; \quad 1,75.$$

3

On a volé la Joconde. Deux ans plus tard en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa.

Un doute plane sur l’authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour que ça soit celle que Léonard a peinte.

On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance.

Le premier qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique.

Le deuxième qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes.

Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

4

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois une pièce de monnaie bien equilibrée et définissons la variable aléatoire X comme étant le nombre de piles obtenues.

a) Déterminer l'espace image de la variable aléatoire X .

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c) Donner la fonction de répartition F_X et la fonction de masse p_X et tracer leur graphiques.

5

Un joueur lance un dé équilibré et gagne 10 euros si le résultat est pair, il perd 10 euros si le résultat est "1", ou "3" et ne perd ou ne gagne rien si le résultat est "5". Décrire la variable aléatoire représentant le gain du joueur ainsi que sa loi de probabilité.

Donner la fonction de répartition, la fonction de masse et tracer leurs graphiques.

Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.5
le 9 décembre 2009

1

On a volé la Joconde. Deux ans plus tard en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa. Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour qu'elle soit celle que Léonard a peinte.

On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance. Le premier qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes.

Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

2

i) On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois une pièce de monnaie bien equilibrée et définissons la variable aléatoire X comme étant le nombre de piles obtenues.
- a) Déterminer l'espace image de la variable aléatoire X .
- b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- c) Donner la fonction de répartition F_X et la fonction de masse p_X et tracer leur graphiques.

ii) On choisit au hasard et sans remise trois boules d'une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules noires.

Si X représente le nombre de boules rouges dans l'échantillon choisi, vérifier que X est bien une variable aléatoire. Décrire la loi de probabilité de X. Donner la fonction de répartition, la fonction de masse et tracer leurs graphiques. Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire.

3

i) Un joueur lance un dé équilibré et gagne 10 euros si le résultat est pair, il perd 10 euros si le résultat est "1", ou "3" et ne perd ou ne gagne rien si le résultat est "5". Décrire la variable aléatoire représentant le gain du joueur ainsi que sa loi de probabilité. Donner la fonction de répartition, la fonction de masse et tracer leurs graphiques. Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire.

ii) Les probabilités pour que trois tireurs atteignent une cible sont : $\frac{1}{6}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{3}$. Chacun tire une seule fois sur la cible.

a) Calculer la probabilité P pour que l'un d'eux exactement atteigne la cible.

b) Si seulement l'un d'eux a atteint la cible, quelle est la probabilité pourqu'il s'agisse du premier tireur ?

iii) On considère un système équipé d'un détecteur de panne. On établit les constatations suivantes, de facon empirique :

- S'il y a panne, elle est détectée avec 95% de réussite .

- S'il n' y a pas de panne, l' alerte de détection fonctionne avec une probabilité de 6%.

- Une panne apparait avec une probabilité de 2%. Si l'alerte est donnée, avec quelle probabilité peut-on affirmer qu'elle ne correspond pas à une panne ? Commenter votre résultat.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.6
le 16 décembre 2009

1

Le 14 juillet à Saint Troupaize, il fait beau sept fois sur dix.

Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévisions météorologiques indépendantes :

- La météo nationale, qui se trompe deux fois sur cent.
- Une grenouille verte, qui se trompe une fois sur vingt.

La météo annonce de la pluie, alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. **Quel est le temps le plus probable ?**

2

Soit l'expérience aléatoire de l' observation du **temps d'attente** (en min.) pour l'arrivée d'un autobus à une intersection.

On associe à ce phénomène aléatoire l'espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ avec :

$$\Omega = [0,\ 8]; \quad \mathcal{A} = \mathcal{R}_{[0,8]}$$

Vérifier que l'application suivante P définie pour tout $A \in \mathcal{A}$, est une mesure de probabilité sur Ω :

$$P[A] = \int_A f(t)dt \quad \text{où} \quad f(t) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{t}{16} \quad \text{si} & 0 \leq t \leq 4 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{16} \quad \text{si} & 4 < t \leq 8 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

Un individu attend l'autobus depuis déjà deux minutes.

i) Déterminer l'espace de probabilité conditionnelle pour le temps que cet individu devra encore attendre.

ii) Trouver la probabilité qu'il doive attendre encore moins de 5 minutes.

4

Soient deux boîtes A et B qui contiennent respectivement 8 transistors dont 3 sont défectueux et 5 transistors dont 2 sont défectueux. Un transistor est tiré aléatoirement de chaque boîte.

a) Quelle est la probabilité pour que l'un des deux transistors soit en bon état et l'autre défectueux ?

b) Dans le cas étudié en a) quelle est la probabilité pour que le transistor défectueux soit tiré de la boîte A ?

5

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$ avec fonction de densité :

$$\forall \quad x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Déterminer le support, la fonction de répartition, la moyenne et la variance de X.

Calculer :

$$P[\{|X| > 2\}],\ \ P[\{|X| < 1\}],\ \ P[\{X < -3\}]$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.7
le 6 janvier 2010

1

Quand on téléphone entre 18 heures et 19 heures chez Toto, on a neuf chances sur dix de tomber sur son répondeur.

Il utilise cet interlocuteur électronique lorsqu'il est là deux fois sur trois pour ne pas avoir à répondre à des oppurtuns. Quand il est absent, il l' utilise toujours.

a) Calculer la probabilité de téléphoner lorsqu'il est là.

b) On tombe sur le répondeur, calculer la probabilité pour qu'il soit là.

2

1. Déterminer la **moyenne** et la **variance** d'une variable aléatoire Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer sa **fonction caractéristique** et sa **fonction génératrice**.
2. La probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est $\dfrac{1}{4}$.

   i) En supposant qu'il tire 7 fois quelle est la probabilité P pour qu'il atteigne la cible au moins deux fois ?

   ii) Combien de fois doit-il tirer, pour que la probabilité qu' il atteigne la cible au moins 1 fois, soit plus grande que $\dfrac{2}{3}$?

3

Dans une école d'ingénieurs, on suppose que le résultat (sur 100) à un examen de probabilités est aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(70,\ 196)$.

On désire diviser en quatre classes les résultats des étudiants qui se présentent au prochain examen, en supposant que les nombres réels positifs $C_1,\ C_2,\ C_3$, vérifient, $C_1\ >\ C_2\ > C_3$:

$A =$ { "Un résultat supérieur ou égal à C_1" }

$B =$ { "Un résultat inférieur à C_1, mais supérieur ou égal à C_2" }

$C =$ { "Un résultat inférieur à C_2, mais supérieur ou égal à C_3" }

$D =$ { "Un résultat inférieur à C_3" }

Déterminer les constantes $C_1,\ C_2,\ C_3$ afin que les classes $A,\ B,\ C,\ D$ contiennent respectivement $10\%,\ 30\%\ 45\%,\ 15\%$ des étudiants respectivement.

4

Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$ qui représente la durée de service d'une pièce d'equipement ; vérifier que f_X définie ci-dessous est une bonne fonction de densité de probabilité qu'on associera à X :

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} (0,001)e^{-(0,001)x} & si & x > 0 \\ & & \\ 0 & & ailleurs \end{array} \right\}$$

i) Déterminer la fonction de répartition, la moyenne et la variance.

iii) Déterminer la probabilité que la pièce d'équipement dure :

a) plus de 1000 heures, b) exactement 1000 heures, c) entre 800 et 1200 heures, d) moins de 100 heures.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.8
le 13 janvier 2010

1

Les professeurs de l'EISTI ont souvent remarqué des pannes concernant les projections aux écrans du Grand Amphi. Habituellement on constate 3 principales raisons : dans 60% des cas la panne provient d'un des projecteurs alors que celle qui est due à un faux contact des câbles survient dans 20% des cas ; le reste de ces problèmes est dû à la lampe du rétroprojecteur. Ces pannes s'expriment par l'extinction de l'image sur la partie gauche ou sur la partie droite de l'écran.

Les nombreuses observations donnent probabilité de $0,3$ pour la disparition de l'image à droite si la panne provient du projecteur, alors que la disparition de l'image sur la partie gauche de l'ecran survient avec probabilité 0.8 si la panne provient du rétroprojecteur, et une probabilité $0,9$ si le problème est dû aux câbles.

Si pendant le cours de Physique l'image disparaît sur la partie gauche de l'ecran quelle est la probabilité pour que la panne provienne d'un mauvais contact des câbles ?

2

A la suite de nombreuses observations scientifiques durant les cinq dernières années on a pu conclure que le nombre d'apparitions de tremblements de terre par an, suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec :

$$P[\{X \geq 3\}] = 0,8413$$
$$P[\{X \geq 9\}] = 0,0228$$

Déterminer le nombre moyen de tremblements de terre par an ainsi que la variance σ^2.

3

i) Pour la variable aléatoire X qui représente le nombre d'appels téléphoniques reçus à une centrale durant une période de temps donnée, l'ensemble des valeurs observables est $\{0, 1, 2, ...\}$.

On considère une fonction de masse pour X, de la forme :

$$p_X(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & si & x \in \{0,\ 1,\ 2, , ...\} \\ 0 & & ailleurs \end{array} \right\}$$

où λ est un nombre réel positif.

Déterminer le support de la variable aléatoire X. Est-elle discrète ? Connaissez-vous son nom ? Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire.

ii) Obtenir la **loi de Poisson comme limite de la loi Binomiale**.

iii) Dans une grande ville 5% des gens sont âgés de plus de 80 ans. On choisit au hasard 20 personnes dans cette ville.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes âgés de plus de 80 ans parmi les 20 personnes choisis.

– a) En formalisant le problème d'après une variable aléatoire discrète, calculer la probabilité pour que moins de 2 personnes parmi les 20 choisies sont âgées de plus de 80 ans.

- b) Est-ce qu'une formalisation différente serait possible (comme approximation de la précédente) ?
  Si oui, calculer de nouveau la probabilité demandée en a), et comparer vos deux résultats. (Commenter vos conclusions).

4

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.
Déterminer :
- a) sa moyenne μ (Espérance)
- b) sa variance σ^2.
- c) sa fonction de répartition.

ii) Un appareil fonctionne au moins deux heures sans panne. Après deux heures de fonctionnement, sa fonction de fiabilité est donnée par :

$$\phi(t) = e^{-(0,1)t}$$

- a) Donner la fonction de densité de la variable aléatoire T qui représente le temps de fonctionnement de l'appareil avant la première panne.
- b) En appliquant les résultats du i) trouver la fonction de répartition la moyenne et la variance de T.
- c) Quelle est la relation entre la fonction de répartition et la fiabilité de l'appareil ?

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.9
le 26 janvier 2010

1

i) Soit une variable aléatoire Y qui suit une loi Lognormale avec paramètres μ et σ^2 .
(Rappel : la variable aléatoire $X = \ln Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.)

a) Montrer que la fonction de densité de Y est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{cc} f_Y(y) = \dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{(lny-\mu)^2}{2\sigma^2}) & si \quad y > 0 \\ 0 \quad \text{ailleurs} & \end{array} \right\}$$

b) Exprimer la fonction de répartition de Y en termes de la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

c) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

ii) La taille (en millimètres) des grains de sable d'un certain type suit une loi Lognormale avec paramètres : $\mu = 0,05$ et $\sigma^2 = 0,01$.
- a) Déterminer la taille moyenne de ces grains.
- b) Déterminer la proportion de ceux -ci ayant une taille inférieure à un milimètre.

2

i) Soit X une variable aléatoire continue avec support $C_X =]-a,\ a[$ où $a > 0$ et fonction de densité f_X.
Montrer que si $\phi :\ \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}$ telle que $Y = X^2 = \phi(X)$ est une variable aléatoire, alors Y est une variable aléatoire continue ; déterminer le support $C_Y = \phi(C_X)$ et la fonction de densité f_Y. Calculer l'espérance et la variance. Appliquer pour :

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{1}{2a} & \text{si} & x \in]-a,\ a\ [\\ 0 & & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

ii) Soit X une variable aléatoire avec fonction de densité :

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-x} & \text{si} & x \in]0,\ +\infty\ [\\ 0 & & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

Déterminer le support et la fonction de densité de la variable aléatoire suivante :
$Y = \phi(X) = e^{-X}$

3

Une machine fabrique des vis ayant comme diamètre une variable aléatoire normale de moyenne $10\ mm$ et d'écart type de $1\ mm$.

Une autre machine fabrique des écrous ayant comme diamètre une variable aléatoire normale de moyenne $11\ mm$ et d'écart type de $0,5\ mm$.

En choisissant au hasard une vis et un ecrou, quelle est la probabilité pour que la vis rentre dans l'écrou.

4

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.
Déterminer :
- a) sa fonctionnelle génératrice $M_X(t)$ et sa fonction caractéristique $\Phi_X(\omega)$,
- b) sa moyenne μ (Espérance)
- c) sa variance σ^2.

ii) Le chef de l'orchestre philarmonique de Metropolitan Opera de New York, est très ennuyé aujourd'hui car le premier violon est déjà en retard de 6 minutes par rapport au rendez-vous fixé à 20 h pour la répétition générale. Ses collègues savent déjà que ses retards (qui sont fréquents) sont en moyenne de 10 min. Soit T la variable aléatoire qui représente le temps de retard du violoniste.
a) En précisant convenablement les constantes θ et ν montrer que la fonction f_T ci-dessous est une bonne fonction de densité pour la variable aléatoire T ; donner le nom de la loi correspondante, son support et calculer sa fonction de répartition :

$$f_T(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} \theta e^{-\theta\ (t-\nu)} & si & t > \nu \\ & & \\ 0 & & ailleurs \end{array} \right\}$$

b) Quelle est la probabilité, pour que le violoniste arrive finalement après $20h$ 20 ?

iii) Une photocopieuse fonctionne au moins 4 jours sans panne ; la fiabilité de cette machine est donnée par :

$$\phi(t) = e^{-(0,2)t}$$

- a) Donner la fonction de densité de la variable aléatoire T qui représente le temps de fonctionnement de la machine avant la première panne.
Calculer la moyenne et la variance de T.
- b) Déterminer la fonction de répartition correspondante et donner sa représentation graphique. Donner son interprétation en termes de la fiabilité.

5

Un joueur lance deux dés équilibrés et il observe la somme des résultats sur les dés. Le joueur est déclaré gagnant s'il obtient un 7 ou un 11 et perdant s'il obtient un 2 ou un 12. Tout autre résultat n'implique aucun jugement.

a) Déterminer l'espace de probabilité initial de l' expérience aléatoire du lancement des deux dés.

b) Soit X la variable aléatoire qui représente le somme des résultats sur les 2 dés. Déterminer l'espace de probabilité induit par cette variable aléatoire X son support et sa fonction de masse.

c) Soit Y la variable aléatoire qui représente le gain du joueur. Si le joueur gagne ou perd 10 euros selon le cas, déterminer le support de cette nouvelle variable. Trouver la fonction de masse et la fonction de répartition de Y. Donner les représentations graphiques correspondantes.

d) Déterminer l'espérance mathématique du gain du joueur.

e) Si le joueur gagne 10 euros mais perd x euros, déterminer x afin que le jeu soit honnête, c'est à dire, que l'espérance mathématique du gain soit nulle.

1 Tables

Variable aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

2 Table B_1

[1] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante.

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

3 Table B_2

[2] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 0.1
Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2

[1]Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

[2]Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.09000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.53590
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.57530
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.61410
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.65170
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.68790
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.72240
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.75490
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.78520
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.81330
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.83890
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.86610
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.88300
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.90147
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.91774
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.93189
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.94408
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.95449
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.96327
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.97062
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.97670
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.98169
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.98574
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.98899
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.99157
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.99361
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.99520
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.99642
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.99736
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.99807
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.99860
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.99899