E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES I
Devoir surveillé n^0 1, donné le 12 décembre 2011
(Durée 2h.)
(Tout document et calculatrice sont interdits)

I (4 *Pts.*)

Soient : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements tels que :

$$P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$$

1. Trouver un encadrement de $P(A \cap B)$.
2. Trouver pour quelle condition sur $P(A \cup B)$, la probabilité $P(A \cap B)$ atteint sa valeur minimale.
3. Trouver pour quelle condition sur $P(A \cup B)$, la probabilité $P(A \cap B)$ atteint sa valeur maximale.

II (4 *Pts.*)

Toto a l'estomac fragile mais il aime malgré tout dîner chez MacDo deux fois sur trois où il s'expose à une gastrite avec une probabilité de $0,10$. Le reste du temps il dîne chez Hamburger-Prince et par la suite, il souffre encore de sa gastrite avec une probabilité de $0,15$.

Sachant qu' aujourd'hui Toto a une gastrite calculer la probabilité d'avoir mangé chez MacDo.

III (4 *Pts.*)

Pour chacune des variables aléatoires suivantes indiquer la loi usuelle suivie (avec les valeurs précises de ses paramètres). Préciser son support, sa fonction de masse ou fonction de densité, son espérance et sa variance.

1. Le nombre annuel d'accidents à un carrefour donné sachant qu'il y a en moyenne $1,5$ accidents par mois.
2. Le nombre d'accidentés à un carrefour donné pour l'année 2011 sachant que 1000 personnes ont traversé ce carrefour et que la probabilité d'avoir un accident est de $0,01$.
3. Le temps (en heures) qui sépare deux accidents à un carrefour donné sachant que la probabilité pour qu'il y ait deux accidents en moins de deux heures est de $0,1$

IV (4 *Pts.*)

Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec les résultats suivants :

- 56% ont un taux inférieur à 165 *cg*.
- 34% ont un taux compris entre 165 *cg* et 180 *cg*.
- 10% ont un taux supérieur à 180 *cg*.

1. Déterminer les paramètres de la loi normale.
2. Combien de personnes faut-il prévoir de soigner dans une population de 10000 personnes si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 *cg* ?

V (4 *Pts.*)

Soit X une variable aléatoire de support $D_X = \mathbf{N}$ et telle que :

$$\forall n \geq 1, \quad P[X = n] = \frac{3}{n} P[X = n - 1]$$

1. Déterminer $p_n = P[X = n]$ en fonction de n et de p_0.
2. En déduire la valeur de p_0.
3. Quelle loi usuelle la variable aléatoire suit-elle ?

1 Tables

Variable Alèatoire centrèe rèduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0,\ 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

2 Table B_1

[1] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrèe rèduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

3 Table B_2

[2] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, o x est donnè par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 3.1
Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2

[1] Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publiè par Longman Group Ltd., London (prècèdemment publiè par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et èditeurs.

[2] Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimè avec la permission de John Wiley

Fonction de rèpartition de la var.alèatoire normale centrèe rèduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999

Exercice 1:

1) $P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}$ (car au max, $A \subset B$ ou $B \subset A$ et $P(A \cap B) = P(A)$ (ou $P(B)$))

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = -P(A \cup B) + P(A) + P(B)$

$= \frac{3}{2} - P(A \cup B)$

Au max, $P(A \cup B) = 1 \Rightarrow$ au min, $P(A \cap B) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\frac{1}{2} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}}$

2) $P(A \cap B)$ atteint sa valeur minimale lorsque $\boxed{P(A \cup B) = 1}$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Au max, $P(A \cap B) = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{3}{4}}$

Exercice 2:

M : "Toto mange chez MacDo". $P(M) = \frac{2}{3}$

$\overline{M}$: "Toto mange chez Hamburger - Price". $P(\overline{M}) = 1/3$

G : "Toto a une gastrite".

$P(G \mid M) = 0,10$

$P(G \mid \overline{M}) = 0,15$

$P(M \mid G)$?

$$P(M|G) = \frac{P(M\cap G)}{P(G)} = \frac{P(G|M)\cdot P(M)}{P(M)\cdot P(G|M) + P(\overline{M})\cdot P(G|\overline{M})}$$

$$= \frac{0{,}10 \times \frac{2}{3}}{0{,}10\cdot\frac{2}{3} + 0{,}15\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\cancel{30}}}{\frac{2}{\cancel{30}} + \frac{1{,}5}{\cancel{30}}} = \boxed{\frac{4}{7} = P(M|G)}$$

Exercice 3:

1) Loi de Bernoulli : $X : \mathcal{B}(p)$ $\quad (p = 1{,}5)$

$D_x = \{0 ; 1\}$

$$p_x = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{si } x \in D_x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$E[X] = p$

$V[X] = p(1-p)$

2) Loi Binomiale: $X : \mathcal{B}(n,p)$ $\quad (n = 1000,\ p = 0{,}01)$

$D_x = [\![0, n]\!] = [\![0, 1000]\!]$

$$p_x = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x \in D_x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$E[X] = np$

$V[X] = np(1-p)$

3)

Exercice 4:

X : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

A : "Taux inférieur à 165 cg"

B : "Taux compris entre 165 cg et 180 cg"

C : "Taux supérieur à 180 cg"

$P(A) = 0,56 \qquad P(B) = 0,34 \qquad P(C) = 0,10$

1) $P(X \leq 165) = 0,56 = F\left(\frac{X-\mu}{\sigma^2} \leq \frac{165-\mu}{\sigma^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{165-\mu}{\sigma^2} = 0,151 \Rightarrow 0,151\sigma^2 + \mu = 165$

$P(X > 180) = 0,10 = 1 - P(X \leq 180)$

$\Rightarrow P(X \leq 180) = 0,90$

$F\left(\frac{X-\mu}{\sigma^2} \leq \frac{180-\mu}{\sigma^2}\right) = 0,90$

$\Rightarrow \frac{180-\mu}{\sigma^2} = 1,282 \Rightarrow 1,282\sigma^2 + \mu = 180$

$\begin{cases} 0,151\sigma^2 + \mu = 165 \\ 1,282\sigma^2 + \mu = 180 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sigma^2 = \frac{15}{1,131} \simeq 13 \\ \mu = 165 - \frac{15}{1,131} \times 0,151 \\ \simeq 163 \end{array}}$

2) $P(X \leq 182) = F\left(\frac{X-\mu}{\sigma^2} \leq \underbrace{\frac{182-\mu}{\sigma^2}}_{1,46}\right) = 0,927850 = p$

Il faut prévoir de soigner $10\,000 \times (1-p)$ personnes

soit

Exercice 5 :

1) $\forall n \geq 1,\quad p_n = \frac{3}{n} p_{n-1}$

$$p_{n-1} = \frac{3}{n-1} p_{n-2} \Rightarrow p_n = \frac{3^2}{n(n-1)} p_{n-2}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{3^n}{n!} p_0$$

Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 1$, $p_n = \frac{3^n}{n!} p_0$.

Pour $n = 1$: $p_1 = \frac{3}{1} p_0 = \frac{3^1}{1!} p_0$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ tel que $p_n = \frac{3^n}{n!} p_0$.

$$p_{n+1} = \frac{3}{n+1} p_n = \frac{3}{n+1} \frac{3^n}{n!} p_0 = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} p_0.$$

Donc par récurrence, $\boxed{p_n = \frac{3^n}{n!} p_0}$

2) $\sum_{x \in D_X} p_X(x) = 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} p_0 = 1$$

$$p_0 e^3 = 1$$

$$\boxed{p_0 = e^{-3}}$$

3) La variable aléatoire suit la loi de poisson de paramètre $\lambda = 3$ $\left(p_n = \frac{e^{-3} 3^n}{n!}\right)$