E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.9
le 13 février 2012

1

Une machine fabrique des vis ayant comme diamètre une variable aléatoire normale de moyenne 10 mm et d'écart type de 1 mm.

Une autre machine fabrique des écrous ayant comme diamètre une variable aléatoire normale de moyenne 11 mm et d'écart type de $0,5$ mm.

En choisissant au hasard une vis et un ecrou, quelle est la probabilité pour que la vis rentre dans l'écrou.

2

Dans un lot d'objets le poids d'un objet suit une loi normale avec moyenne 120 et variance 100. Trouver la fonction caractéristique et la fonctionnelle génératrice de cette variable aléatoire (poids).

a) Si un groupe de 25 objets est choisi au hasard quelle est la probabilité pour que le poids moyen du groupe soit supérieur à 125 ?

b) Si deux groupes de 25 objets chacun sont choisis au hasard , quelle est la probabilité que la moyenne des poids pour les deux groupes diffère plus que de 5 ?

3

Considérons n mesures indépendantes $X_1, X_2, \ldots X_n$ de l'énergie moyenne μ d'un faisceau de particules à l'intérieur d'un accélérateur.

On utilise la moyenne empirique $\overline{X}$ de ces mesures comme une estimation de μ.

Supposons que $\forall\ i,\ \ X_i$ suit une loi de probabilité de moyenne μ et d'écart type 1. Quel est le nombre minimal n de mesures à effectuer, afin que l'erreur de l'estimation soit au plus égale à $0,095$, avec une probabilité de $0,9$?

4

Dans le cadre d'une enquête hospitalière on suppose connaître pour chaque sujet la cause de son décès :

- 1) décès lié au cancer des bronches,
- 2) décès lié à toute autre cause (accident, autre maladie, etc,...)

Pour les sujets de la première catégorie, on admet que la distribution du délai de survie X (exprimé en mois) suit une loi Lognormale d' espérance μ_X et de variance σ_X^2, c'est à dire que l'on peut trouver des constantes $a,\ x_0,\ b$, telles que la variable :

$$Y = a\ln(X - x_0) + b$$

suive une loi normale d'espérance μ_Y et de variance σ_Y^2.

a) Calculer μ_X en fonction de $a,\ x_0,\ b,\ \mu_Y,\ \sigma_Y$.

b) Pour étudier la moyenne des délais de survie sur un groupe de n sujets, revient -il au même de considérer les variables $\overline{X}$ et $\overline{Y}$?

c) On admet maintenant que la transformation $Y = \ln X$ est telle que Y suit la loi $\mathcal{N}(1,8;\ 1)$.

Avant la fin de l'enquête on désire étudier le délai moyen de survie observé sur les 16 premiers sujets, tous décédés.

Quelle est la probabilité pour que $\overline{Y} > 2,8$?

5

Les demi-finales de cet hiver au championnat du ski alpin sur les deux parcours A et B des Hautes Alpes sont organisés d'après les résultats statistiques des cinq dernières années.

Les skieurs choisissent au hasard (equiprobabilité) entre les deux parcours qui comportent chacun deux étapes en tenant compte des informations suivantes : Sur la première étape du parcours A il y a une probabilité de $0,80$ de faire une chute, alors que sur la première étape du parcours B il y a une probabilité de $0,70$ de tomber.

Sur la deuxième étape du parcours A il y a une probabilité de $0,30$ de ne pas tomber, si le skieur n'est pas tombé à la première étape et une chance de $0,10$ de ne pas tomber, si il a déjà fait une chute durant la première étape.

Sur la deuxième étape du parcours B le skieur a aussi une chance de $0,10$ de ne pas tomber si il a déjà fait une chute durant la première étape, et une probabilité de $0,70$ de tomber si il n'a pas fait une chute pendant la première étape du parcours. Les candidats sont éliminés, si ils font au moins deux chutes sur le parcours choisi. Pour un skieur pris au hasard :

a) Quelle est la probabilité qu'un candidat soit éliminé ?

b) Si le skieur a été éliminé quelle est la probabilité qu'il ait emprunté le parcours B ?

6

Pénélope essuie les verres au fond du café et dans ce décor elle a remarqué qu'un client sur quatre laissait un pourboire au comptoir.

a) Soit X la variable aléatoire représentant le pourcentage de consommateurs qui laissent un pourboire au comptoir. Etablir la loi de la variable aléatoire X. Déterminer la moyenne et la variance de X. Calculer la fonction caractéristique et la fonction génératrice correspondantes.

b) Pour 1000 clients, soit Y la var. aléatoire qui représente le nombre de clients qui laissent un pourboire.

Etablir la loi de la variable aléatoire Y. Pour quelles lois discrètes et par quelle loi continue peut-on modéliser ou approcher la loi de Y?

Calculer par deux de ces trois lois la probabilité :

$$P(245 < Y < 255).$$

1 Tables

Variable Aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0,\ 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

Table B_1

[1] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

[1] Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publiè par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

Table B_2

[2] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 0.1 Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne $.06$ de la table B_2

[2]Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimée avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999

TD9

Probabilités

Exercice 2 :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \{X_i\}_{i=1..25}$ $\quad \forall i \ \mathcal{N}(120, 100)$

Var. aléatoire associée (Moyenne empirique) $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{25}$ suit la loi $\mathcal{N}(\underbrace{120}, \sigma_{\bar{x}}^2)$ $= 4$

$E[\sum a_i X_i] = \sum a_i E(X_i)$ $\quad \mu_{\bar{x}} = E\left[\frac{\sum X_i}{25}\right] = \frac{1}{25}\left(25\, E[X_i]\right) = \mu_{X_i} = \underbrace{120}$

Rappel : $Var[\sum a_i X_i] = \sum a_i^2 \, Var[X_i]$

$Var\left[\frac{\sum X_i}{25}\right] = \left(\frac{1}{25}\right)^2 \sum (Var[X_i]) = \frac{25}{25^2}$ $\quad Var[X_i] = \frac{100}{25} = \underbrace{4}$

a- $P[\bar{X} > 125] = 1 - P[\bar{X} \leq 125]$

Rappel : Var. centrée réduite associée à X : $Y = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$

$P[\bar{X} > 125] = 1 - P\left[\left\{Y \leq \frac{125-120}{2}\right\}\right] = 1 - 0,993790$
$\frac{5}{2}$
$= 0,00621$

b- On définit $\bar{X}_1$ le poids du 1^{er} groupe. $\mathcal{N}(120, 4)$

$\bar{X}_2$ ——— 2^e ——— $\mathcal{N}(120, 4)$

On s'intéresse à la variable aléatoire "différence" $Z = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

$\mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

$E[Z] = E[\bar{X}_1] - E[\bar{X}_2] = 0$

$\sigma_Z^2 = Var[Z] = Var[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = 1^2\, Var[\bar{X}_1] + (-1)^2\, Var[\bar{X}_2]$
$= 4 + 4 = 8$

$\sigma_Z = \sqrt{8} \simeq 2,83$

$Z : \mathcal{N}(0, 8)$ $\quad$ Var. aléatoire centrée réduite : $Y_Z = \frac{Z - 0}{2,83}$

$P[\{|Z| > 5\}] = P[|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 5]$

$= P[\{Z < -5\} \cup \{Z > 5\}] = P\left[\left\{Y < \underbrace{\frac{-5}{2,83}}_{-1,77}\right\}\right] + P\left[\left\{Y > \frac{5}{2,83}\right\}\right]$

$= 1 - P\{Y \leq 1,77\} + 1 - P[\{Y \leq 1,77\}]$

$= 2 - (2 \times 0,96164) = 2 - 1,92328 =$

$= 0,07672$

Exercice 3 :

Application du th. "Central-Limite"

échantillon $\{X_1, \dots, X_n\}$: Ces var. al. suivent la même loi et sont indépendantes.

$Y_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ (var. al. centrée, réduite associée à $\bar{X}$)

$\underbrace{n \gg}_{n \text{ très grand}}$ $Y_n : \mathcal{N}(0,1)$

$P[\{\overbrace{|\bar{X} - \mu|}^{\text{erreur d'estimation}} \leq 0{,}095\}] = 0{,}9 \iff P[-0{,}095 \leq \bar{X} - \mu \leq 0{,}095] = 0{,}9$

$\iff P\left[\frac{-0{,}095 - 0}{1/\sqrt{n}} \leq Y_n \leq \frac{0{,}095 - 0}{1/\sqrt{n}}\right] = 0{,}9$

Posons $c = 0{,}095\sqrt{n}$.

$\iff F(c) - F(-c) = 0{,}9$

$\iff F(c) - (1 - F(c)) = 0{,}9$

$2F(c) = 1{,}9$

$F(c) = 0{,}95 \iff c = 1{,}645$

$\iff \sqrt{n} = \frac{1{,}645}{0{,}095}$

$n = \left(\frac{1{,}645}{0{,}095}\right)^2 > 299$