Finir TD (pour le 9/02)

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.8
le 30 janvier 2011

1

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.

- Donner la définition générale du support C_X, de la fonction de densité f_X et calculer la fonction de répartition F_X.
  Donner l'expression de la fonction de fiabilité $\phi_X(x_0)$ en termes de la fonction de répartition.
  Déterminer la fonction génératrice et la fonction caractéristique de cette loi.
- Une entreprise produit des batteries de voiture. Le temps de fonctionnement de ces batteries s'exprime en kilomètres parcourus et est modélisé par une variable aléatoire T. La fonction de fiabilité de ce temps de fonctionnement est donnée par :

$$\phi_T(t) = \exp(-10^{-5}t).$$

  Sachant que la batterie a déjà parcouru 8.000 km, quelle est la probabilité de faire un voyage de 1000 km sans défaillance ?

ii) Le nombre moyen d'accidents de voitures sur un tronçon, d'autoroute au cours d'une journée est de 3.
Modéliser ce problème par une variable alétoire discrète, donner son support, sa fonction de masse et calculer la probabilité pour qu'il y ait strictement moins de 3 accidents.

2

Un système de communication comporte n composants. Chacun d'entre eux fonctionne indépendamment des autres avec une probabilité p de tomber en panne.

Le système tombe en panne si la moitié ou plus de la moitié de ses composants sont défectueux.

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de composants défectueux du système.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Supposons que la probabilité pour un composant d'être défectueux est $p = 0,1$.
   Un système comprenant 2 composants, a-t-il plus de chances de tomber en panne qu'un système à 4 composants ?
3. Quelle devrait être la valeur de la probabilité p pour qu'un système à 2 composants et un système à 4 composants aient la même probabilité de tomber en panne ?

   On considère maintenant un système à $n = 100$ composants avec une probabilité $p = 0,1$.
   Un système d'alerte se declenche lorsque plus de 5% des composants sont défectueux.
4. Par quelle loi discrète peut-on approcher la loi de X ? Quelle est la probabilité, pour que le système d'alerte se declenche ?

5. Par quelle loi continue peut-on approcher la loi de X ? Evaluer à nouveau la probabilité pour que le système d'alerte se declenche ?
6. En utilisant la même loi, qu'à la question 5, pour combien doit-on fixer le seuil d'alerte pour que la probabilité d'alerte descende à $0,551$?

à faire sur feuille

On considère maintenant que le seuil d'alerte sera donné si la variable aléatoire transformée de X

$$\frac{e^X}{10^5}$$

est supérieure à 10 (avec X la variable aléatoire que vous avez utilisée à la question 5).

7. Quel est le support de Y ?
8. Déterminer la fonction de densité et la fonction de répartition de Y.
9. Donner une expression de la fonction de répartition de Y, en termes de la fonction de répartition d'une loi Normale centrée réduite : $\mathcal{N}(0,1)$.
10. Quelle est la probabilité pour que l'alerte soit donnée ?

(Indication : $\ln(10^6) = 13,8$)

3

1. Le cours d'une action à la bourse de Paris est une variable aléatoire X qui suit une loi Log-normale de paramètres $\mu = 8$ et $\sigma^2 = 4$.
   (a) Déterminer le support et la densité de probabilité de X.
   (b) Etablir une relation entre la fonction de répartition de X et celle d'une loi normale centrée réduite.
   (c) Calculer la probabilité que le cours de cette action soit supérieur à 148. (On donne $ln(148) \approx 5$).

à finir

2. En période de crise financière, le cours de cette action Y suit une loi exponentielle de paramètres : $\nu = 0, \theta = \frac{1}{150}$.
   (a) Rappeler le support et la densité de probabilité de Y.
   (b) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
   (c) Un détenteur de cette action ne vend que si le cours dépasse 200. Quelle est la probabilité qu'il vende à un prix supérieur à 350.

4

1. (a) Déterminer l'expression $\Phi_X(t)$ de la fonction génératrice d'une variable aléatoire X qui suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$.
   (b) En déduire la moyenne et la variance de X.
2. La probabilité qu'une feuille de papier bloque une photocopieuse de l'EISTI est de $p = 0,01$. On note Y la variable aléatoire indiquant le nombre de blocages dans une série de 600 pages photocopiées.
   Un document de 15 pages est photocopié en 40 exemplaires.
   (a) Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun blocage.
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 3 blocages.
   (c) Proposer une autre loi approximant la précédente. Utiliser cette dernière pour refaire les deux calculs (a) et (b).

1 Tables

Variable Aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0,\,1) \le x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

Table B_1

[1] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

Table B_2

[2] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 0.1 Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2

[1]Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publiè par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

[2]Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimée avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999

TD8 # Probabilités

Exercice 1: i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité

X : variable aléatoire qui suit la loi exponentielle.

$Exp(\theta, \nu)$, $\theta > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$. $C_x =]\nu, +\infty[$

Loi de densité : $f_x(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta(x-\nu)} & \text{si } x \in C_x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Fct° de répartition : $P[\{X \leq x\}] = F_x(x) = \int_\nu^x \theta e^{-\theta(t-\nu)} dt$

$= \theta e^{\theta\nu} \left[-\frac{e^{-\theta t}}{\theta} \right]_\nu^x$

$= 1 - e^{-\theta(x-\nu)}$

$$\boxed{F_x(x) \underset{\nu \neq 0}{=} \begin{cases} 1 - e^{-\theta(x-\nu)} & \text{si } x \in C_x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad F_x(x) \underset{\nu=0}{=} \begin{cases} 1 - e^{-\theta x} & \text{si } x \in C_x =]0, +\infty[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}}$$

Fonction de Fiabilité : $\varphi(x) = P[\{X > x\}] = 1 - P[\{X \leq x\}]$

⚠ on prend $F_x(x)$ pour $\nu = 0$

$= 1 - (1 - e^{-\theta x})$

$= e^{-\theta x}$

Pb : supposons $\varphi(x) = 0,30$ θ ?

et la voiture a des pb à partir de 3 ans ($\Rightarrow x = 3$)

on écrit : $0,30 = e^{-3\theta}$ $\Rightarrow 3\theta = -\ln(0,30)$

$\theta = -\frac{1}{3} \ln(0,30)$

$E[X] = \mu = \nu + \frac{1}{\theta}$. $\nu = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{\mu}$

On peut trouver θ à partir de la moyenne.

Fonction génératrice : $M_x(t) = E[e^{Xt}]$

Rappel : $E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_x(x) dx$ cas continu

$= \sum h(x) p_x(x)$ cas discret

$M_x(t) = \int_\nu^{+\infty} e^{xt} \theta e^{-\theta(x-\nu)} dx = \int_\nu^{+\infty} e^{x(t-\theta)} \theta e^{\theta\nu} dx = \theta e^{\theta\nu} \left[\frac{1}{t-\theta} e^{x(t-\theta)} \right]_\nu^{+\infty}$

Pour que ça converge, il faut $t-\theta \leq 0$ et $t \neq \theta$

De pr $t < \theta$, $M_x(t) = -\frac{e^{\theta \nu}\theta}{t-\theta} e^{\nu(t-\theta)} = \frac{\theta e^{\nu t}}{\theta - t}$

$$M_x(t) = \begin{cases} \frac{\theta e^{\nu t}}{\theta - t} & \text{si } \theta > t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction caractéristique: $\phi_x(\omega) = E\left[e^{i\omega x}\right]$

on remplace t par $i\omega$: $\phi_x(\omega) = \frac{\theta e^{i\omega\nu}}{\theta - i\omega}$

$$\boxed{E[X] = \left(\frac{dM_x(t)}{dt}\right)_{t=0}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta e^{\nu t}}{\theta - t}\right)_{t=0}$$

$$= \left(\frac{\theta \nu e^{\nu t}(\theta - t) + \theta e^{\nu t}}{(\theta - t)^2}\right)_{t=0}$$

$$= \frac{\theta^2 \nu + \theta}{\theta^2}$$

$$E[x] = \nu + \frac{1}{\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E[x^2] &= \left(\frac{d^2 M_x(t)}{dt^2}\right)_{t=0} \\ \sigma_x^2 &= E[x^2] - \left(E[x]\right)^2 \end{aligned}}$$

$$\varphi(t) = e^{-10^{-5} t} \Rightarrow \theta = 10^{-5}$$

1^e méthode: $P\left[\{T > 9000\} | \{T > 8000\}\right] = \frac{P\left[\{T > 9000\} \cap \{T > 8000\}\right]}{P\left[\{T > 8000\}\right]}$

$$= \frac{P\left[\{T > 9000\}\right]}{P\left[\{T > 8000\}\right]} = \frac{\varphi(9000)}{\varphi(8000)} = \frac{e^{-9000 \cdot 10^{-5}}}{e^{-8000 \cdot 10^{-5}}} =$$

$$= \frac{e^{-9 \cdot 10^{-2}}}{e^{-8 \cdot 10^{-2}}} = e^{-10^{-2}} = e^{-0{,}01}$$

$2^{ème}$ méthode : $\quad \nu = 8000$

$$P(T > 9000) = 1 - F_X(9000) = 1 - \left(1 - e^{-10^{-5}(9000-8000)}\right)$$

$$= e^{-0{,}01}$$

ii) On utilise la loi de Poisson : $P_\lambda \qquad (\lambda > 0)$

Support : $D_X = \mathbb{N}$

Fonction de masse : $P_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$M_X(t) = E\left[e^{Xt}\right] = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{xt} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\Phi_X(\omega) = e^{\lambda(e^{i\omega} - 1)}$$

$$E[X] = \left(\frac{d}{dt} M_X(t)\right)_{t=0} = \lambda$$

$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) \qquad \text{avec } \lambda = 3$$

$$= \frac{e^{-3} \cdot e^0}{1} + \frac{e^{-3} e^1}{1} + \frac{e^{-3} e^2}{1}$$

$$= \frac{17}{2} e^{-3}$$

Exercice 3:

$Y = \ln X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ $\mu_Y = 8$, $\sigma_Y^2 = 4$

$\boxed{X = e^Y}$ => cette var. aléatoire suit la loi Log-normale

Rappel: * $Y = \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$; $C_Y = \mathbb{R}$, $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}}$

* Transformation d'une var. aléatoire : Soit X_1 une variable aléatoire avec C_1, f_{X_1} et soit $X_2 = \varphi(X_1)$, var. aléatoire continue et monotone, et $\Psi(X_2) = \varphi^{-1}(X_2) = X_1$

Support : $\boxed{C_2 = \varphi(C_1)}$

$\Rightarrow \exists\, C_2$ et $\boxed{f_{X_2}(x_2) = f_{X_1}\left(\Psi(x_2)\right) \cdot \left|\Psi'(x_2)\right|}$

a- X est continue et monotone donc on peut appliquer le théorème.

$X = \varphi(Y) = e^Y$. $\Psi(x) = \ln(x)$; $\Psi'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$C_X =]0, +\infty[$

$f_X(x) = f_Y\left(\ln(x)\right) \cdot \left|\dfrac{1}{x}\right|$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln(x)-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2}} \cdot \left(x^{-1/8} \cdot \frac{e}{x}\right)}$$

$$\cancel{f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \dfrac{e}{x^{9/8}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{\sigma_Y^2}} \, e^{\frac{\mu_Y}{2\sigma_Y^2}} = e^{\ln\left(x^{-\frac{1}{2\sigma_Y^2}}\right)} \, e^{\frac{\mu_Y}{2\sigma_Y^2}}$$

$$x^{-1/8} \qquad e$$

b- Fonction de répartition de la loi log-normale en termes de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$:

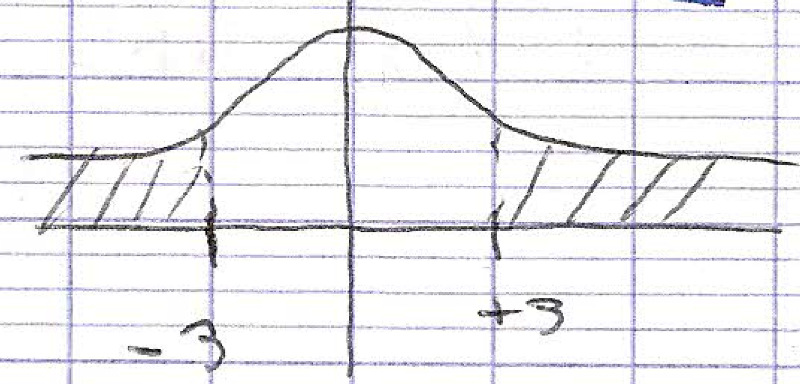
$$F_X(x) = P\left(\{X \leq x\}\right) = \int_0^x f_X(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2}}{t}\,dt$$

Transformation : $z = \dfrac{\ln(t) - \mu_Y}{\sigma_Y} \Rightarrow dz = \dfrac{dt}{t\,\sigma_Y}$

TD8

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma_y}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(x)-\mu_y}{\sigma_y}} e^{-\frac{1}{2} z^2}\, \cancel{\sigma_y}\, dz = \tilde{F}_z\left(\frac{\ln(x)-\mu_y}{\sigma_y}\right)$$

c) $P(\{X > 148\}) = 1 - P(\{X \leq 148\}) = 1 - F_x(x = 148) = 1 - \tilde{F}_z\left(z = \frac{\ln(148) - 8}{2}\right)$



Rappel: La fonction de densité est symétrique.

$$F_x(-3) = 1 - F_x(3)$$

$$\begin{aligned} P(\{X > 148\}) &= 1 - \tilde{F}_z(-1,5) \\ &= 1 - (1 - F_z(1,5)) \\ &= F_z(1,5) \end{aligned}$$

$$P(\{X > 148\}) = 0,933190$$

Espérance et Variance de la loi Log-normale:

Rappel: Fonction génératrice de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$

$$\begin{aligned} M_y(t) &= E\left[e^{Yt}\right] \\ &= e^{\mu_y t + \sigma_y^2 \frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

$\mathcal{N}(0,1) \rightarrow e^{t^2/2}$

Espérance: $E[X] = E\left[e^{Y}\right] = e^{\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2}} = \mu_x \quad \left(= E\left[e^{Yt}\right] \text{ pr } t = 1\right)$

Variance:
$$\begin{aligned} Var[X] &= E\left[X^2\right] - \mu_x^2 \\ &= E\left[e^{2Y}\right] - \mu_x^2 \\ &= e^{2(\mu_y + \sigma_y^2)} - \left(e^{\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2}}\right)^2 \\ &= e^{2(\mu_y + \sigma_y^2)} - e^{2\mu_y + \sigma_y^2} \\ &= e^{2\mu_y}\left(e^{2\sigma_y^2} - e^{\sigma_y^2}\right) \\ &= e^{2\mu_y + \sigma_y^2}\left(e^{\sigma_y^2} - 1\right) \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1) Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

Rappel : $D_x = [\![0, n]\!]$

$$P_X(x) = \begin{cases} C_n^x \, p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x \in D_x \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2) $p = 0{,}1$ et $n = 2$

$$P(\{\text{panne}, X \geq 1\}) = 1 - P[X < 1]$$
$$= 1 - P(0)$$
$$= 1 - n(1-p)^n$$
$$= 1 - 2 \times 0{,}9^2 = 0{,}19$$

$p = 0{,}1$ et $n = 4$.

$$P(\{\text{pann}, X \geq 2\}) = 1 - P[X < 2]$$
$$= 1 - P(0) - P(1)$$
$$= 1 - 4 \times 0{,}9^4 - 4 \times 0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}058$$