INTRODUCTION AUX PROBABILITES
XII-XIII-XIV-XV

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2010-2011

Table des matières

Table des figures

Chapitre 12

Vecteurs aléatoires

1 Vecteurs aléatoires (ou de probabilités)

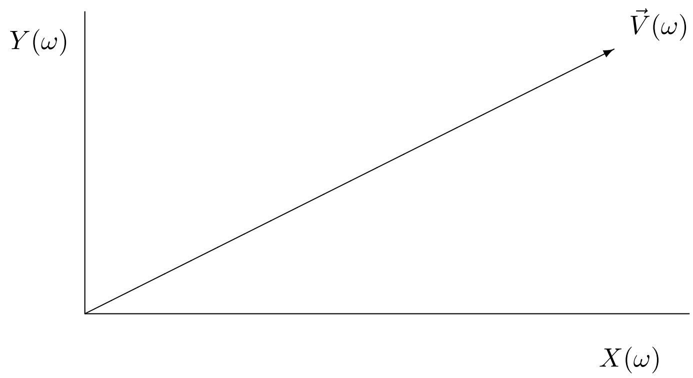
1 Vecteurs aléatoires de dimension 2

a)

$$\begin{array}{lcl} X\ : (\Omega,\ \mathcal{A},\ P) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ Y\ : (\Omega,\ \mathcal{A},\ P) & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

$\vec{V}(\omega) \in \mathbb{R}^2$ (vect. aléatoire)

Exemple 1.1 *Evénement :* $A(D) \equiv \vec{V} \in D, \quad D \subset \mathbb{R}^2$



On associe l'ens. des pts ω t.q.

$$A(x,y) = \{\omega | X(\omega) \leq x\ ;\ Y(\omega) \leq y\}$$

b) Mesure de Probabilité - Fonction de répartition jointe

$$F(x,y) \equiv P[\{X \leq x\} \bigcap \{Y \leq y\}]$$

*** Cas continu :**

(i) La mesure de probabilité définie par :

$$P(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

si elle existe on l'appelle **fonction de densité jointe** (notée "$f(x,y)$") d'un vecteur aléatoire continu et inversement :

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \underset{(f(x',y'))}{\overset{P(x',y')}{\Updownarrow}}\, dx'dy'$$

(ii) Fonction de répartition marginale

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x',y')dx'dy'$$

et fonction de densité marginale $\Leftrightarrow$ (dériv. par rapport à x)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

*** Cas discret - fonction de masse jointe :**

(i)

$$P[x_i, y_j] \equiv P[\{X = x_i\} \bigcap \{Y = y_j\}]$$

et $\forall\ D \in \mathbb{R}^2$ fonction de répartition

$$P[D] = \sum_{(x_i,y_j)\in D} P[x_i, y_j]$$

(ii)

- Fonction de masse marginale

$$Px_i = \sum_{y_j} P(x_i y_j)$$

- Fonction de répartition marginale

$$F_X(x_i) = \underset{y_j \in]-\infty,+\infty[}{\overset{F[x_i, +\infty]}{\downarrow}}$$

c) Espérance mathématique (cas général : $h(X,Y)$)

*** Cas continu :**

$$E[h[X,Y]] = \iint h(x,y)\ f(x,y)dxdy$$

*** Cas discret :**

$$E[h[X,Y]] = \sum_{x_i,y_j} h(x_i,y_j)P(x_i,y_j)$$

Propriétés

(a) Si $h(x,y) = x + y$

$$E[h(X,Y)] = E[X] + E[Y]$$

(b) Si $h(x,y) = xy$ $\Rightarrow$ en général

$$E[(X \cdot Y] \neq E[X]E[Y]$$

(c) (Rappel) Déf : Variables aléatoires indépendantes

$$\Leftrightarrow \quad F(x,y) = F_X(x)F_Y(y).$$

(d)

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$P(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$$

Remarque importante

Cette factorisation peut se produire même si $X,\ Y$ ne sont pas indépendantes (liées).

d) Covariance (définition)

$$\text{Cov}(X,Y) \equiv E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

ou $\Rightarrow$

$$\text{Cov}[X,Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y$$

(i) Corollaire

$\text{Cov}(X,Y) = 0$
si $X,\ Y$ sont non corrélées

(ii) "Inégalité de Schwartz"

$$\text{Cov}^2(X,Y) \leq \sigma_X^2\sigma_Y^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Cov}(X,Y) \leq \sigma_X\sigma_Y$$

e) Coefficient de corrélation (de $X,\ Y$) déf.

$$C \equiv \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

en général

$$|C| \leq 1$$

* Si $C = 0$ $\Leftrightarrow$ var. al. $X,\ Y$ non corrélées.
* Si $|C| = 1$ (C peutêtre aussi < 0) $\Leftrightarrow$ $X,\ Y$ **complètement corrélées**.

2 Distributions Conditionnelles

1 Fonction de masse conditionnelle

(cas discret)

Définition 2.1

$$P_{x_i|y_j} \overset{notation}{\equiv} P[\{X = x_i\}|\{Y = y_j\}] \overset{def}{\equiv} \frac{P[\{X = x_i\} \bigcap \{Y = y_j\}]}{P[Y = y_j]}$$

où

$$P[Y = y_j] = \sum_{x_i} P_{x_i y_j}$$

2 Fonction de densité conditionnelle (cas continu)

i) **Cas scalaire**

Définition 2.2

$$f_X[x|y] \overset{def}{\equiv} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Proposition 2.1

$$\int f_X[x|y]dx = 1,$$

ii) **Cas vectoriel** (sur $\mathbb{R}$)

Définition 2.3

$$f_X[\vec{x}|y] \overset{def}{\equiv} \frac{f(x,y)}{f_Y(\vec{y})}$$

et aussi :

Proposition 2.2

$$i) \qquad \int f_X[x|y]dx_1 \dots dx_n = 1$$

$$ii) \qquad \int f_X[x|y] f_Y(y) dy_1 \dots dy_n = f_X(x)$$

Exercice 2.1 *Montrer les propositions 2.1 et 2.2*

3 Moments conditionnels (cas général-vectoriel)

1

Soit une fonction - var. aléatoire $h(X)$, avec,

$$X \text{ vect. de probabilité} ; X : \ (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^n$$
$$Y \text{ vect. de probabilité} ; Y : \ (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^n$$

Définition 3.1 *Espérance Conditionnelle*

$$E_X[h(X)|y] = \int h(x) f_X[x|y] dx$$

Propriété importante !

Proposition 3.1

$$E_Y[E_X[h(X)|y]] = E_X[h[X]]$$

Exercice 3.1 *Montrer la proposition 3.1*

2 Moments Conditionnels d'ordre p

Définition 3.2

$$E_X[X^p|y] = \int x^p \, f[x|y] dx$$

(Définition analogue pour le cas discret)

3 Variance conditionnelle

Définition 3.3

$$\begin{aligned} E_X[(X-\mu_X)^2|y] &= \int (X-\mu_x)^2 \, f[x|y] dx \\ &= E[X^2|y] + \mu_X^2 - 2\mu_X E_X[X|y] \end{aligned}$$

4 Transformations de vecteurs aléatoires (à densité)

Théorème 3.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et soit*

$$X = \{X_1, \ X_2, ..., X_n\} : \ (\Omega, \mathcal{F}, P) \ \rightarrow \ \mathbb{R}^n$$

un vecteur aléatoire.

Soit $Y = \phi(X)$ un vecteur aléatoire - transformation biunivoque du vecteur aléatoire X.

$$\Rightarrow$$

la densité de probabilité du vecteur Y est obtenue par la formule suivante :

$$g(y) = \frac{f((\phi)^{-1}(y))}{|\det J|}$$

*où J est la matrice -**Jacobien** de la transformation.*

Chapitre 13

Introduction aux Processus Stochastiques

1 Définition d'un processus stochastique

1 Processus Stoch. et sa Trajectoire

Définition 1.1

Soit ($\Omega,\ \mathcal{F},\ P$) un espace de probabilité, et soit Y une variable aléatoire définie sur Ω (donc $\mathcal{F}-$ mesurable).

*On appelle **tribu engendrée par** Y ou $Y-$ tribu, la plus petite des tribus (formée par des sous ensembles de Ω) par rapport à laquelle la var. al. Y est **mesurable** et on note :*

$$\mathcal{F}(Y) \ \text{ ou } \ \sigma(Y)$$

.

Définition 1.2 *Soient :*

- *($\Omega,\ \mathcal{F},\ P$) un espace de probabilité*
- *T un ensemble quelconque*
- *$(E,\ \mathcal{E})$ esp. mesurable*

*On appelle **processus stochastique** défini sur Ω, avec T **ensemble des temps** et E **espace des états**, toute famille $\{X(t)\}_{t\in T}$ de var. al. à valeurs dans E.*

- *La variable aléatoire $X(t)$ est appelée : état à l'instant t.*
- *Autre notation : $\{X_t\}_{t\in T}$*

Définition 1.3 *Trajectoire*

$\forall\ \omega \in \Omega$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} T & \to & E \\ t & \mapsto & X(t,\omega) \end{array} \qquad \text{ou} \quad t \mapsto X_t(\omega)$$

*est appelée : **la trajectoire associée à** ω*

On étudiera **2 cas**

(a) $T \in \mathbb{N}$ cas en *temps discret*

(b) $T = \{t \in [0, t_0]\}$ (intervalle de $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ *cas en temps continu*

- Par la suite, on considérera que $E \subset \mathbb{R}$ ou $E \subset \mathbb{R}^N$ (cas général) (fini ou infini)

2 Processus à accroissements indépendants

Définition 1.4 *Soit* $\{X(t)\}_{t\in T}$ *un* ***processus stochastique*** *défini sur* Ω *; il est à* ***accroissements indépendants*** *ssi*

$$\forall \quad t_1 < t_2 < t_3 \ldots < t_n \quad (t_i \in T)$$

les var. aléatoires :

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots X(t_n) - X(t_{n-1})$$

sont indépendantes

3 Processus à accroissements stationnaires

Définition 1.5 *Un* ***processus stochastique*** $\{X(t)\}_{t\in T}$, *défini sur* Ω, *est à* ***accroissements stationnaires*** *ssi les var. aléatoires.* $X(h)$ *et* $X(t+h) - X(t)$ *sont equidistribuées.*

4 Filtration

Définition 1.6 *Soit* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ *un espace de probabilité.*
On appelle ***filtration***, *une famille de sous tribus*

$$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$$

t.q. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *pour* $s \leq t$ *(**famille croissante de sous tribus de*** $\mathcal{F}$*).*

Interprétation
$\mathcal{F}_t$ (appelée **tribu des évènements antérieurs à** t) modélise les informations disponibles à temps t.

5 Filtration naturelle

Remarque 1.1 Tout processus stochastique X génère une "filtration naturelle"

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(X(s);\ s \leq t)$$

$\Leftrightarrow$ ***filtration engendrée par les variables aléatoires antérieures à l'instant*** t.

Définition 1.7 ***Processus stochastique adapté une filtration*** $\{\mathcal{F}_t\}$
*(i)**Cas continu** : Un processus stochastique* $X(t)_{t\in T}$ *est adapté à une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *si* $\forall t \in\ T\ X_t$ *est* $\mathcal{F}_t-$ *mesurable*
*(ii) **Cas discret** :* X_n *adapté à* $\mathcal{F}_n \quad \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, *(*$T = \mathbb{N}$*),* X_n *est* $\mathcal{F}_n - mesurable$

Définition 1.8 ***Processus stochastique prévisible par rapport à*** $\{\mathcal{F}_n\}$
Cas discret : X_n *prévisible, par rapport à* $\{\mathcal{F}_n\}$
$\Leftrightarrow \quad X_n$ *est adapté à* $\mathcal{F}_n$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, *(*$T = \mathbb{N}$*),* X_n *est* $\mathcal{F}_{n-1} - mesurable.$

Chapitre 14

Introduction aux Processus Stochastiques Chaînes de Markov A

1 Processus Markoviens-Chaînes de Markov

1 Références

(i) P. BREMAUD
"Introduction aux probabilités" par P. Bremaud
Edition : Springer et Verlag
(ii) R. Faure, "*Recherche Opérationnelle*" (Masson)
(iii) J.-M. Helary - R. Pedrono, "*Recherche Opérationnelle*"
(iv) P. Gordon, "*Théorie des chaînes de Markov*" (Dunod)
(v) S.M.Ross , "*Initiation aux Probabilités*
(Presses Polytechniques et Universitaires Romandes)
(vi) S. Lipschutz, "*Probabilités (Série SCHAUM)* (Mc Graw Hill - Ediscience)

2 Processus de Markov- Chaînes de Markov

Définition 1.1 *Données* $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}, P)$, $\{X_t\}$ *processus stochastique sur* Ω
$\Rightarrow$ $\{X_t\}$ *est Markovien (ou processus de Markov)*
ssi : $\forall \quad t_1 \leq t_2$

$$P[\{X(t_2) \in \mathcal{B}\}|\mathcal{F}_{t_1}] = P[\{X(t_2) \in \mathcal{B}\}|X(t_1)]$$

*ou **ssi***

$$E[f[X(t_2))|\mathcal{F}_{t_1}] = E[f[X(t_2)]|X(t_1)]$$

pour toute fonction f *continue et bornée.*
$\Leftrightarrow$ *la loi de* $X(t_2)$ *conditionnellement à* $\mathcal{F}_{t_1}$ *est égale à la loi de* $X(t_2)$ *conditionnellement à* $X(t_1)$.

Autrement dit :
A la date t_1 toute l'information pertinente sur les réalisations futures sont contenues dans $X(t_1)$ (v. aussi cas particulier les Chaînes de Markov).

Définition 1.2 (Chaîne de Markov)

Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t\in T}$ *défini sur un espace de probabilité* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ *avec :*
E*= Ensemble fini ou dénombrable* ***-ensemble des états du système***
T*= Sous-ensemble de* $\mathbb{R}^+$*,* ***ensemble des paramètres du temps***
est appelé Chaîne de Markov à "temps" $\in T$ *à valeurs dans* E*, si. :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 0 < t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t(\in T);\ s \in T;\ i_0, i_1, \ldots, i_n, i, j \in E$$

si l'égalité suivante entre probabilités conditionnelles est bien vérifiée :

$$P[X_{t+s} = j\ \ |X_{t_0} = i_0,\ X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n,\ X_t = i] = P[X_{t+s} = j|X_t = i]$$

Remarque 1.1 *Souvent on utilise la notation* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *pour le temps discret.*

Remarque Importante

Une chaîne de Markov est complètement déterminée : **(a)** par ses **probabilités de transition** :

$$\begin{array}{c} p_{i,j}(t,s) = P[X_{t+s} = j|X_t = i] \\ \forall\, t \in T,\ s \in T \\ i \in E,\ j \in E. \end{array}$$

et **(b)** par sa **loi de probabilité de l'état initial :**

$$\Pi_i^{(0)} = P[X_0 = i] \quad (i \in E)$$

Définition 1.3 *Les chaînes* ***homogènes*** *de Markov.*

Ce sont les chaînes pour lesquelles les probabilités de transition $p_{i,j}(t,s)$ *ne dépendent pas de l'instant t mais seulement de l'accroissement de temps* s*.*

* On étudiera surtout les chaînes homogènes à temps discret. $(t = n \in \mathbb{N})$

3 Matrices de Transition

Matrice Stochastique

Définition 1.4

a) ***Vecteur de probabilité***

$u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \in \mathbb{R}^n$ *est un vecteur de probabilité*

$$\textit{ssi} \quad \begin{cases} 0 \le u_i \le 1 & \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} u_i = 1 \end{cases}$$

Exemples :

$u = \{\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0;\ \frac{1}{2}\}$ ***oui*** *(vecteur de probabilité*

$v = \{\frac{3}{4};\ 0;\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\}$ ***non***

$w = \{\frac{3}{4};\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{4}\}$ ***non***

b) ***Matrice Stochastique***

Une matrice carrée $P = \{p_{ij}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est une matrice stochastique si chacune de ses lignes est un vecteur de probabilité :*

$$\Rightarrow$$

$$0 \le p_{ij} \le 1 \ \ \textit{et,} \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad (\forall\, i = 1, \ldots, n)$$

Exemples 1.1

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (Non); \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (Non); \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad (Oui).$$

Proposition 1.1 *Si A et B sont deux matrices stochastiques*

$$\Rightarrow \begin{cases} (i) & AB\textit{est une matrice stochastique} \\ (ii) & A^m\textit{est une matrice stochastique} \end{cases}$$

Remarque 1.2 *Les probabilités p_{ij} de transition d'une chaîne de Markov finie (qui est un processus stochastique) peuvent être rangées sous la forme d'une matrice P qu'on appelle matrice de transition.*

Proposition 1.2 *La matrice de transition P d'une chaîne de Markov est une matrice stochastique.*

Matrice de Transition

Cas discret : matrice de transition

$$\begin{aligned} P &= \{p_{ij}\}_{i,j\in E} \\ p_{ij} &= P\{X_{n+1} = j|X_n = i\} \\ &= P\{X_1 = j|X_0 = i\} \end{aligned}$$

Cas continu :
Famille de matrices de transition.

$$\begin{aligned} P &= \{p_{ij}(t)\}_{i,j\in E} \\ p_{ij}(t) &= P\{X_{t_0+t} = j|X_{t_0} = i\} \\ &= P\{X_t = j|X_0 = i\} \end{aligned}$$

4 Propriétés de la matrice de transition P

et loi de probabilité d'état.

Proposition 1.3 ***Cas discret***

$$\begin{array}{rll} i) & P^{n+m} = P^n \cdot P^m & \forall\, n,m \in \mathbb{N} \\ ii) & P^n = \{p_{ij}^n\}; & p_{ij}^{(n)} = P[X_{n_0+n} = j|X_{n_0} = i] = P[X_n = j|X_0 = i] \\ iii) & \textit{Soit } \Pi^{(n)} \equiv (\Pi_i^{(n)})_{i\in E} & (\textit{ vecteur de prob des états du système à } t = n) \\ & \textit{avec } \Pi_i^{(n)} = P[X_n = i] & \\ & \Rightarrow & \Pi^{(n+m)} = \Pi^{(n)} P^m \end{array}$$

5 Graphe associé à une chaîne de Markov

Définition 1.5 ***(Graphe orienté d'une chaîne de Markov discrète)***
Le graphe associé à une chaîne de Markov (et à sa matrice de transition P) est défini par :
*(a) Ses **sommets** qui représentent les états du système $(i \in E)$*

(b) Ses ***arêtes*** $(i \rightarrow j)$ *associées aux probabilités de transition :* $p_{ij} > 0$

Utilité d'un graphe

(i) On voit directement si le système peut passer d'un état à un autre (dans un temps n fini)
(ii) On étudie plus facilement les propriétés des états du système
(iii) On classifie plus facilement les états du système (Classes d'équivalence)

Exemple 1.1 exercice
Faire le graphe associé à la chaîne de Markov dont P *est :*

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.4 Cas continu
(i) $\forall\, t,\ s \in T,\ P(t+s) = P(t) \cdot P(s)$
(ii) $P(t) = \{P_{ij}(t)\}$ *où*

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= P[X_{t+s} = j | X_t = i] \\ &= P[X_s = j | X_0 = i] \end{aligned}$$

(iii) Si $\Pi(t) = \{\Pi_i(t)\}_{i \in E}$ *avec*

$$\Pi_i(t) = P[X_t = i]$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\Pi(t+s) = \Pi(t) \cdot P(s)}$$

Chapitre 15

Introduction aux Processus Stochastiques Chaînes de Markov B

1 Régimes d'une chaîne de Markov Ergodicité - Classes d'equivalence

1 Résumé

* Régimes d'une chaîne de Markov - stationnarité
* Ergodicité
* Caractérisation des états
* Classes d'équivalence

Remarque 1.1 *Par la suite on étudiera toujours :* ***les cas discrets***

2 Régimes d'une chaîne de Markov

Définitions :

* Régimes d'une chaîne de Markov
* Régime stationnaire (Point fixe de P)
* Ergodicité

Définition 1.1

Le vecteur de probabilité des états du système à l'instant $t = n$ *(ligne de* P *à l'instant* n*),* $\Pi^{(n)}$ *est appelé* ***régime du système à l'instant*** n*.*

Définition 1.2

Un ***régime*** Π ***est stationnaire*** *ssi*

$$\Pi P = \Pi \quad \textit{avec :} \left\{ \begin{array}{rcl} \sum\limits_{i \in E} \Pi_i & = & 1 \\ \Pi_i & \geq & 0 \quad \forall\, i \in E \end{array} \right\}$$

Remarque 1.2

(a) le vecteur Π est un vecteur propre (à gauche) de P associé à la valeur propre $\underline{1}$ de P

(b) $\Leftrightarrow \Pi$ est un **point fixe** de la matrice de transition P considérée comme transformation des probabilités des différents états du système quand le temps **varie** : $n \to n+m$

(c) $\Leftrightarrow \Pi =$ *vecteur constant.*

Exemple 1.1 *Exercice*

On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition P est la suivante ; trouver (si il en existe) le régime stationnaire :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) *(Important !)* La stationnarité du régime :

$$\Pi^{(n)} P = \Pi^{(n)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \ m > n \ : \Pi^{(m)} = \Pi^{(n)}$$

$$\Leftrightarrow$$

La probabilité pour que le système se trouve à un certain état reste la même pour tout instant m après n.

Définition 1.3

*On appelle régime **permanent** le vecteur de probabilité :*

$$\Pi \quad t.q. \quad \Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}$$
$$ou \quad \lim_{n\to\infty} \Pi^{(0)} P^{(n)} = \Pi$$

Remarque 1.3

*Si il existe un **régime permanent** alors il est nécessairement **stationnaire**.*

3 Ergodicité

Définition 1.4

*On dit qu'une chaîne de Markov est **ergodique***
ssi

$$\exists \ \Pi \qquad avec \quad \Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}$$

pour tout ***régime initial*** $\Pi^{(0)}$

Autrement dit : l'ergodicité caractérise les systèmes qui possèdent un régime permanent indépendamment du régime initial $\Pi^{(0)}$

4 Caractérisation des états

Définition 1.5 *(Propriétés des états)*

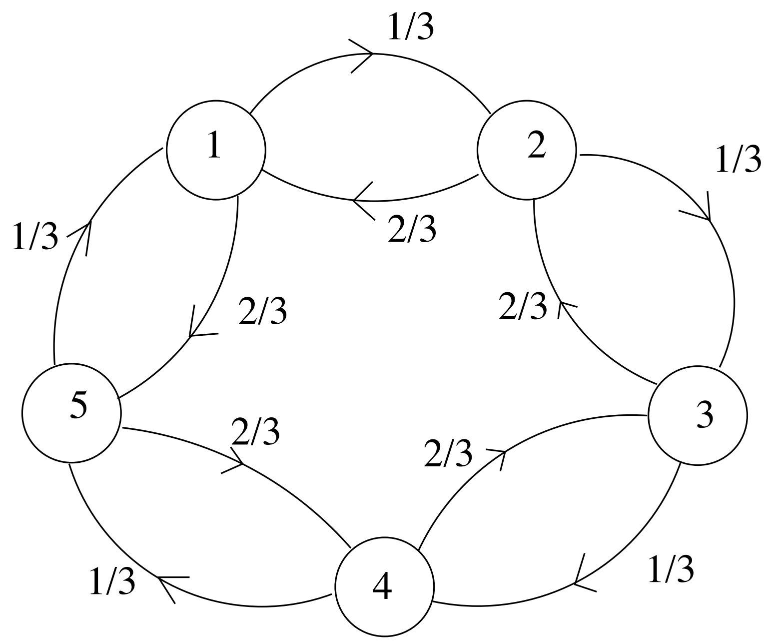


FIG. 15.1 – Une chaîne de Markov irréductible

1) On considère l'application suivante f_i de l'ensemble des états E vers l'intervalle $I = [0,1]$

$$\begin{array}{rcl} E & \rightarrow & [0,1] \\ f_i \ : \ i & \rightarrow & f_i \end{array}$$

$$f_i = P[\exists\, n > 0 | P(X_n = i | X_0 = i)]$$

*Alors : a) i est un **état transitoire** si*

$$\underline{f_i < 1}$$

*b) i est un **état récurrent** si*

$$\underline{f_i = 1}$$

*2) Soit d_i = **pgcd** des longueurs de chemins partant de i et arrivant en i*
Si $d_i = 1$
*$\Rightarrow$ L'état i est dit **apériodique***
Si $d_i \neq 1$
*$\Rightarrow$ L'état i est dit **périodique** de **période** d_i*
3) Quand le système se trouve à l'état $i \in E$ et il ne peut plus en sortir

$$\Leftrightarrow \quad P_{ii}^{(n)} = 1 \quad (\forall n)$$

*Cet état est appelé **absorbant**.*
(Il est forcément récurrent et apériodique)

5 Etats et Classes d'équivalence

Définition 1.6 ***Classes d'équivalence d'une chaîne de Markov.***

On définit une relation d'équivalence sur E :

$$i \sim j \Leftrightarrow \begin{cases} (i=j) \quad \underline{\textit{ou}} \\ \begin{pmatrix} \exists\, n \geq 1 \text{ t.q. } P_{ij}^{(n)} > 0 \\ \textit{et}\ \exists\, m \geq 1 \text{ t.q. } P_{ji}^{(m)} > 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On dit alors que les deux états i et j appartiennent à la même classe d'équivalence.

Remarque 1.4 Les états d'une même classe ont les mêmes propriétés d'où les trois possibilités :
- ***Classe Récurrente***
- ***Classe Transitoire***
- ***Classe Absorbante*** *($\Leftrightarrow$ 1 seul état $\in E$)*

Définition 1.7 *Chaîne de Markov* ***irréductible***
$\Leftrightarrow$ *G fortement connexe*
$\Leftrightarrow \exists\, 1$ *seule classe récurrente*