CHAPITRE 3 : COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES

Table des matières

1. Fonction de répartition, mesure de probabilité et lois marginales 1
   1.1. Cas de variables aléatoires continues 1
   1.2. Cas de variables aléatoires discrètes 2
2. Indépendance et corrélation 3
   2.1. Indépendance de variables aléatoires 3
   2.2. Corrélation de variables aléatoires 4
3. Transformation de vecteurs aléatoires continus 4
Exercices 6

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires :

$$X : (\Omega,\mathcal{A},P) \to \mathbb{R}$$

$$Y : (\Omega,\mathcal{A},P) \to \mathbb{R}$$

On étudie alors le couple (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa tribu borélienne.

1. FONCTION DE REPARTITION, MESURE DE PROBABILITE ET LOIS MARGINALES

La *fonction de répartition* du couple (X,Y) donnée par

$$F(x,y)=P\left[(X\leq x)\cap(Y\leq y)\right],$$

définit alors la loi jointe du couple.

On appelle *lois marginales* les lois de probabilités de X et Y pris séparément.

1.1. Cas de variables aléatoires continues

Si le couple (X,Y) admet une *fonction de densité conjointe* f alors on a

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y),$$

et on retrouve

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dt\,ds\,.$$

Les fonctions de répartitions marginales se déduisent immédiatement,

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\,dt\,ds$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dt\,ds$$

Les fonctions de densité marginales s'obtiennent en dérivant les fonctions de répartition marginales

$$\text{Loi marginale de X} \quad : \quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,dt \ \text{ (dérivée par rapport à x)}$$

$$\text{Loi marginale de Y} \quad : \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,y)\,ds \ \text{ (dérivée par rapport à y)}$$

De la même façon que pour une variable aléatoire, on calcule la probabilité d'un événement A de la tribu engendrée par le couple (X,Y), par exemple A={(X,Y), X+Y=0}, par l'intégrale

$$P(A)=\int\int_A f(x,y)\,dy\,dx=\int\int_{\{x+y=0\}} f(x,y)\,dy\,dx\,.$$

L'espérance s'obtient de la même manière

$$E[h(X,Y)]=\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)f(x,y)\,dy\,dx\,.$$

<u>Exemple 1</u>

Soit le vecteur aléatoire (X,Y) de fonction de densité conjointe suivante

$$f(x,y)=\begin{cases}2ye^{-x} & \text{si } x\geq 0 \text{ et } 0<y<1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Les lois marginales sont données par

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(y)=\begin{cases}2y & \text{si } 0<y<1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

La fonction de répartition conjointe est

$$F(s,t)=\begin{cases}(1-e^{-s})t^2 & \text{si } s\geq 0 \text{ et } 0<t<1\\ 1-e^{-s} & \text{si } s\geq 0 \text{ et } t\geq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

On peut aussi calculer la probabilité $P(X+Y>1)=2e^{-1}$.

1.2. Cas de variables aléatoires discrètes

Supposons que les variables aléatoires X et Y prennent des valeurs dénombrables respectivement x_i, $i\in I$ et y_j, $j\in J$. On définit la *fonction de masse conjointe* du couple (X,Y) par

$$\forall i\in I,\ \forall j\in J,\ p(x_i,y_j)=P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)].$$

Les fonctions de masse marginales sont données par

$$\text{Loi marginale de X} \quad : \quad p_X(x_i)=\sum_{j\in J} p(x_i,y_j) \ \ \forall i\in I.$$

$$\text{Loi marginale de Y} \quad : \quad p_Y(y_j)=\sum_{i\in I} p(x_i,y_j) \ \ \forall j\in J.$$

De la même façon, on peut calculer la probabilité d'un événement ainsi que l'espérance.

2. INDEPENDANCE ET CORRELATION

2.1. Indépendance de variables aléatoires

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout couple de boréliens B_i et B_j, on a

$$P((X\in B_i)\cap(Y\in B_j))=P(X\in B_i)\times P(Y\in B_j).$$

Autrement dit la loi de probabilité P_{XY} du couple (X,Y) est égale au produit des lois de probabilité P_X et P_Y de X et de Y,

$$P_{XY}=P_X\times P_Y.$$

On en déduit que X et Y sont indépendantes si et seulement si la fonction de répartition du couple est égale au produit des fonctions de répartition marginales,

$$F(x,y)=F_X(x)\times F_Y(y).$$

<u>Cas continu</u>
Si X et Y admettent pour fonctions de densité f_X et f_Y respectivement, alors X et Y sont indépendantes si et seulement si j la fonction de densité du couple (X,Y) est égale au produit des fonctions de densité,

$$f(x,y)=f_X(x)\times f_Y(y).$$

<u>Exemple 1</u> (suite)
Dans l'exemple précédent, la densité conjointe est égale au produit des densités marginales donc les variables X et Y sont indépendantes.

<u>Propriété</u>
Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

<u>Remarque</u> : Attention la réciproque n'est pas vraie.

On en déduit alors immédiatement les résultats suivants.

<u>Propriété</u>

- Soient X et Y deux variables aléatoires admettant les fonctions génératrices M_X et M_Y définies pour tout $t\in]t_1,t_2[$ et $0<t_1<t_2$. Si X et Y sont indépendantes alors
$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t),\ \forall t\in]t_1,t_2[.$$
- Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de fonctions caractéristiques Φ_X et Φ_Y alors
$$\Phi_{X+Y}=\Phi_X\Phi_Y\ .$$

2.2. Corrélation de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérances respectives μ_X et μ_Y. La *covariance* du couple (X,Y) est définie par

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E[XY]-\mu_X\mu_Y .$$

Propriété
Soient X et Y deux variables aléatoires, alors

$$\mathrm{var}(aX+bY)=a^2\,\mathrm{var}(X)+b^2\,\mathrm{var}(Y)+2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

où a et b sont des réels.

Propriété
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors :

$$\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)$$
$$\mathrm{cov}(X,Y)=0$$

(attention, en général, les réciproques sont fausses)

Définition
On appelle *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y le rapport

$$\rho=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

On dit que X et Y sont *complètement corrélées* si $|\rho|=1$ et sont *non corrélées* si $\rho=0$. On définit la *matrice de covariance*

$$\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \rho\\ \rho & \sigma_Y^2\end{pmatrix}$$

Remarque
Le coefficient de corrélation linéaire traduit l'existence ou non d'une relation linéaire entre X et Y.

Propriété
Si X et Y sont indépendantes alors elles sont non corrélées.

3. TRANSFORMATION DE VECTEURS ALEATOIRES CONTINUS

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et (X_1,X_2) un vecteur aléatoire de fonction de densité f. Soit ϕ une application bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$,

$$\phi : x=(x_1,x_2) \mapsto \phi(x_1,x_2)=(\phi_1(x),\phi_2(x)).$$

La fonction de densité du vecteur aléatoire transformé $Y=\phi(X)$, est donnée par

$$g(y)=\frac{f[\phi^{-1}(y)]}{|\det J|},$$

où J est la matrice jacobienne de ϕ.

Exemple 2

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Alors la loi conjointe de (X_1,X_2) est

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$$

On note $Y_1=X_1+X_2$ et $Y_2=X_1+2X_2$. Alors l'application ϕ est définie par

$$\phi(x_1,x_2)=(y_1,y_2)=(x_1+x_2,x_1+2x_2)$$

d'où

$$\phi^{-1}(y_1,y_2)=(x_1,x_2)=(2y_1-y_2,y_2-y_1) \text{ et } J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Finalement, la densité conjointe du vecteur (Y_1,Y_2) est

$$g(y_1y_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(5y_1^2+2y_2^2-6y_1y_2)}.$$

EXERCICES

Exercice 1

Soient $k\geq 2$ un paramètre et (X,Y) un couple de variables aléatoires de fonction de densité conjointe

$$f(x,y)=\begin{cases} k(k-1)(y-x)^{k-2} & \text{si } 0<x\leq y<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1) Montrer que f est une fonction de densité pour tout paramètre $k\geq 2$.
2) Déterminer les deux fonctions de densité marginales.
3) Les variables sont-elles indépendantes ?
4) Calculer $P(X\leq \frac{1}{4} \mid Y>\frac{1}{2})$

Exercice 2

Soient X et Y les proportions de sable et de limon dans un sol. On suppose que le couple (X,Y) admet une fonction de densité constante sur le domaine de variation du couple.

1) Déterminer la fonction de densité du couple.
2) Calculer la probabilité d'avoir plus de sable que de limon.
3) Déduire de la question 1 les fonctions de densité marginales.
4) Calculer la probabilité d'avoir plus de la moitié de sable.

Exercice 3

Dans une ville américaine où les rues sont soit parallèles, soit perpendiculaires, les interventions d'une caserne de pompiers couvrent une zone qui a été définie comme étant l'ensemble des points de la ville pour lesquels la distance parcourue par les pompiers est inférieure à 2 kilomètres. Si l'on suppose que les incendies se déclarent au hasard dans cette zone, quelle sera la distance moyenne que devront parcourir les pompiers pour atteindre le lieu d'incendie ?

Exercice 4

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de lois $N(\mu_1,1)$ et $N(\mu_2,1)$ respectivement, et telles que le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X_2 soit égal à ρ et de fonction de densité (vecteur gaussien)

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\rho)^2}\left[(x_1-\mu_1)^2-2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)+(x_2-\mu_2)^2\right]}$$

Notons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\ :\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) &\mapsto (x_1^2, x_2+x_1)\end{aligned}.$$

Déterminer la loi du couple $(Y_1,Y_2)=\varphi(X_1,X_2)$.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$. On note les variables aléatoires U et V définies par $U=X+Y$ et $V=X/Y$.

1) Déterminer la loi du couple (U,V).
2) Les variables U et V sont-elles aussi indépendantes ?