E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES II
Devoir surveillé n^0 2
donné le 21 mai 2014
(Durée 2h.)
(Tout document, calculatrices et téléphones sont interdits)

I (6*Pts*)

On suppose que dans une certaine catégorie de salariés le revenu mensuel est une variable aléatoire X qui suit la loi Lognormale c'est à dire que la variable aléatoire $Y = \ln(X)$ suit la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$
2. Déterminer les paramètres μ et σ^2 sachant que parmi 10000 salariés :
   - la moitié gagne moins de 1200 euros par mois
   - 1587 salariés gagnent plus de 2000 euros.
3. Quelle est la proportion de salariés gagnant plus de 3000 euros ?
4. Quel est le revenu moyen mensuel ?

Indications Numériques :

$$\ln(2000) = 7,6 \quad \ln(1200) = 7,1 \quad \ln(3000) = 8 \quad \exp(7,2) = 1335$$

Rappels sur la Loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

a) Fonction de densité : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) Fonction génératrice des moments : $M(t) = \exp[\mu t + \sigma^2 t^2/2]$

II (4*Pts.*)

Soit un couple de variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Vérifier si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes

III (6*Pts.*)

A

Considérons l'expérience qui consiste à répéter de façon indépendante une expérience de Bernoulli de probabilité p, jusqu' à obtenir un succès. La variable aléatoire qui compte le nombre de répétitions nécessaires avant le succès suit la loi Géométrique de paramètre p notée $G(p)$.

Cette variable aléatoire (discrète) $G(p)$ admet :

comme **support** : $D_X = \mathbf{N}^*$

et comme **fonction de masse** $p_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{si } x \in D_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour l' espérance et la variance on trouve que :
$\mathbf{E}[X] = \dfrac{1}{p}$ et , $Var[X] = \dfrac{(1-p)}{p^2}$

1. En utilisant la définition de la loi Géométrique proposer un algorithme permettant de simuler **une** réalisation de cette loi.
2. Comment pouvez vous valider votre simulation ?

B

Soit maintenant Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle $Exp[\theta]$. On définit une nouvelle variable aléatoire Z par :

$$\forall n \geq 0, \quad P[Z = n+1] = P[n \leq Y \leq n+1]$$

3. Quelle est la méthode usuelle pour simuler Y ? Donner l'algorithme pour **une** réalisation de Y.
4. Montrer que Z suit une loi géométrique $G(q)$ avec :

$$q = 1 - \exp(-\theta)$$

5. Proposer un nouvel algorithme pour simuler **une** réalisation de loi géométrique $G(q)$.

IV (4*Pts.*)

Soit $\{U_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi définie par :

$$P[U_n = 1] = p \quad \text{et} \quad P[U_n = -1] = q = 1 - p \quad \text{avec } p \in]0,1[$$

On définit une nouvelle suite de variables aléatoires $\{V_n\}_{n\geq 1}$ par :

$$\begin{cases} V_1 = U_1 \\ V_n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \end{cases}$$

1. Déterminer l'espérance de V_n et calculer

$$a = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[V_n]$$

2. En déduire :

$$p_n = P[V_n = 1] \quad \text{et} \quad q_n = P[V_n = -1]$$

3. Vers quelle loi usuelle $\{V_n\}_{n\geq 1}$ converge - t-elle en loi ?
4. Montrer que $\{V_n\}_{n\geq 1}$ ne converge pas en moyenne quadratique vers a. $\{V_n\}_{n\geq 1}$ peut-elle converger en moyenne quadratique vers une autre valeur réelle que a ?

5. On pose maintenant :

$$W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$$

Si n est suffisamment grand par quelle loi peut-on approcher la loi de W_n ? Préciser les paramètres de cette loi.

1 Tables

Variable aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0,\ 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

2 Table B_1

[1] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

3 Table B_2

[2] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 3.1

Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2

1. Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publiè par Longman Group Ltd., London (prècèdemment publiè par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et èditeurs.
2. Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var. aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999