Corrigé Probas 2013

I

1. Support de $Y_n = \{0, n\}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Fonction de masse :

$$P(Y_n = n) = P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = \int_0^{1/n} dx = \frac{1}{n}$$

$$P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

2. $E(Y_n) = n \cdot P(Y_n = n) + 0 \cdot P(Y_n = 0) = 1$

$$E(Y_n^2) = n^2 P(Y_n = n) + 0 \, P(Y_n = 0) = n^2 \times \frac{1}{n} = n$$

$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2 = n - 1$$

Fonction génératrice des moments :

$$M_{Y_n}(t) = E(e^{tY_n}) = e^{nt} P(Y_n = n) + e^{0t} P(Y_n = 0)$$

$$= \frac{1}{n} e^{nt} + 1 - \frac{1}{n}$$

$$\underline{M_{Y_n}(t)} = \frac{1}{n} \underline{(e^{nt} - 1) + 1 \qquad (t \in \mathbb{R})}$$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} E(Y_n) = 1 = E(Y_n)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} V(Y_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$

$M_{Y_n}(0) = 1$

$t < 0 \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} e^{nt} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(e^{nt} - 1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} M_{Y_n}(t) = 1$

$t > 0 \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{nt}}{nt} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} M_{Y_n}(t) = +\infty$

La suite $\{Y_n\}$ ne converge donc pas en loi.

4. $\{Y_n\}$ converge en moyenne quadratique vers $0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} E(Y_n^2) = 0$

Mais $E(Y_n^2) = n$ Donc <u>NON</u>

5. $E(X_\ell) = E(Y_2) = 1$ $V(X_\ell) = V(Y_2) = 2 - 1 = 1$

Théorème de la limite centrale $\Rightarrow$ $\sqrt{k}(Z-1)$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit $\mathcal{N}(0,1)$

$U = \sqrt{k}(Z-1) \Rightarrow Z = \frac{U}{\sqrt{k}} + 1 \Rightarrow$ Z converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(1, \frac{1}{k})$ $(V(Z) = \frac{1}{k})$.

II 1. X suit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0,1) \Rightarrow X = \sigma Z + \mu$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (z \in \mathbb{R})$$

- fonction de répartition de Y :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ = P(X \leq \ln y) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Si $y > 0$ $\quad F_Y(y) = P(\sigma Z + \mu \leq \ln y) = P\left(Z \leq \frac{1}{\sigma}(\ln y - \mu)\right)$

$$\Rightarrow \boxed{F_Y(y) = \begin{cases} F_Z\left(\frac{1}{\sigma}(\ln y - \mu)\right) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}}$$

- <u>fonction de densité de Y</u>

En dérivant F_Y on obtient,

Si $y>0$ $\quad f_Y(y) = \frac{1}{\sigma y} f_Z\left(\frac{1}{\sigma}(\ln y - \mu)\right) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - \mu)^2\right)$

$$\Rightarrow \boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - \mu)^2\right) & \text{si } y>0 \\ 0 & \text{si } y<0 \end{cases}}$$

- $E(Y) = E(\exp(X)) = E(\exp(\sigma Z + \mu)) = E(e^{\mu} \cdot \exp(\sigma Z))$

linéarité de E (intégrale) $\Rightarrow$ $E(Y) = e^{\mu} E(e^{\sigma Z})$

$$E(e^{\sigma Z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma z - \frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2\sigma z)} dz$$

$$E(e^{\sigma Z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2} \cdot e^{\sigma^2/2} dz = \frac{e^{\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2} dz$$

Dans l'intégrale, changement de variable : $t = z - \sigma \Rightarrow dz = dt$

$$\Rightarrow E\left(e^{\sigma Z}\right) = \frac{e^{\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = 1 \quad \Rightarrow \quad E\left(e^{\sigma Z}\right) = e^{\sigma^2/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2$$

$$E(Y^2) = E\left(\left(e^X\right)^2\right) = E\left(e^{2X}\right) = E\left(\exp(2\sigma Z + 2\mu)\right) = e^{2\mu} E\left(e^{2\sigma Z}\right)$$

Calcul précédent avec $\sigma \to 2\sigma$ donne : $E\left(e^{2\sigma Z}\right) = e^{2\sigma^2}$

$$\Rightarrow V(Y) = e^{2(\mu+\sigma^2)} - \left(e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})}\right)^2 = e^{2(\mu+\sigma^2)} - e^{2\mu+\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)}$$

2. $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \quad \Rightarrow \quad E(S_n) = n$

$\{X_i\}$ indépendantes $\Rightarrow V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

X_i suit la loi de ~~Poisson~~ Poisson $\mathcal{P}(1) \Rightarrow V(X_i) = 1$

$$\Rightarrow \underline{V(S_n) = n}$$

Théorème central limite $\Rightarrow Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n)$

converge en loi vers une variable aléatoire Y qui suit $\mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow$ Pour n assez grand, $S_n = \sqrt{n}\, Y_n + n$ suit $\mathcal{N}(n,n)$

$\Rightarrow$ S_{20} suit $\mathcal{N}(20,20)$ $\Rightarrow$ $U = \dfrac{S_{20} - 20}{\sqrt{20}}$ suit $\mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow p = P(S_{20} > 26) = P\left(U > \dfrac{6}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right) = 1 - P\left(U \leq \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$

$p = 1 - P(U \leq 1{,}34) = 1 - 0{,}91 = 0{,}09 \Rightarrow \boxed{p = 9\%}$

III 1. $X = -\dfrac{\ln Y}{p}$ où Y suit la loi uniforme sur $[0,1]$

$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0,1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

a) $C_X =]0, +\infty[$

b) $F_X(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leq 0$

Si $x > 0$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(-\frac{\ln Y}{p} \leq x\right) = P(\ln Y \geq -px)$

$$= P(Y \geq e^{-px}) = 1 - P(Y \leq e^{-px})$$

$$\Rightarrow \boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - F_Y(e^{-px}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

c) Por dérivahon $\quad f_X(x) = \begin{cases} pe^{-px} f_Y(e^{-px}) = pe^{-px} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \begin{cases} p\, e^{-px} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

On vérifie : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = p\int_0^{+\infty} e^{-px}\,dx = p\left[-\frac{1}{p}e^{-px}\right]_0^{+\infty} = 1$

$\rightarrow \boxed{\text{OK}}$

$\Rightarrow$ <u>X suit la loi exponentielle $\mathrm{Exp}[p,0]$</u>

2. a) $C_Y = \mathbb{N}^*$

Fonction de masse : $P(Y=1) = P(X_1 = 6) = \dfrac{1}{6}$

Pour $n \geq 2$ $\quad P(Y=n) = P\left(\{X_k \neq 6 \ \forall k<n\} \cap \{X_n = 6\}\right)$

$$= P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\{X_k \neq 6\}\right) \cap \{X_n = 6\}\right)$$

X_k indépendantes $\Rightarrow$ les événements $\{X_k \neq 6\}$, $k = 1,\dots,n-1$, sont indépendants

$$\Rightarrow P(Y=n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\{X_k \neq 6\}\right) \cdot P(X_n = 6) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k \neq 6) \cdot P(X_n=6)$$

$$= \frac{1}{6} \times \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - P(X_k=6)\right) = \frac{1}{6} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{5^{n-1}}{6^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(Y=n) = \frac{5^{n-1}}{6^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

Vérification : On doit avoir $\sum_{n=1}^{\infty} P(Y=n) = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y=n) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1$$

série géométrique

OK

b) Simulation

$i \leftarrow 1$

Alea $\leftarrow$ rand

Tant que $\left(\text{Alea} > \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right)$ faire

$i \leftarrow i+1$

Fin tant que

$X \leftarrow x_i$

$$\frac{1}{6} \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\right) = \frac{1}{6} \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{i}}{1-\frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{i}$$