EISTI – DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

Probas II - 2012 (rattrapage) – Corrigé

Thomas Papillon

18 mai 2014

1 EXERCICE I

On sait que $X \sim \ln \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i.e. $\ln X = Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1.1 QUESTION A

FONCTION DE RÉPARTITION   Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $x \in D_X$,

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(\ln X \leq \ln x) \\
&= \mathbb{P}(Y \leq \ln x) \\
&= \mathbb{P}(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln x - \mu}{\sigma}) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq \frac{\ln x - \mu}{\sigma}) \\
&= F_Z(\frac{\ln x - \mu}{\sigma})
\end{aligned}
$$

FONCTION DE DENSITÉ

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) \\ &= \frac{d}{dx} F_Z(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}) \\ &= f_Z(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}).\frac{1}{\sigma x} \\ [Z \sim \mathcal{N}(0,1)] &= \frac{1}{\sigma x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x - \mu}{\sigma})^2} \end{aligned}$$

1.2 QUESTION B

Ici, on a $\mu = 2$ et $\sigma = 1$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 12) &= F_X(12) \\ &= F_Z(\frac{\ln 12 - 2}{1}) \\ &= F_Z(\frac{0,485 - 2}{1}) \\ &= F_Z(0,485) \\ &\approx 0,6844 \end{aligned}$$

selon la table fournie dans l'énoncé.

1.3 QUESTION C

TODO

2 EXERCICE II

2.1 QUESTION I

On a ici $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, donc

$$\begin{aligned} D_X &= \{0, \ldots, n\} \\ p_X(k) &= \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = [(1-p) + pe^t]^n \end{aligned}$$

2.2 QUESTION II

2.3 QUESTION III

3 EXERCICE III

Ici, (X, Y) est un vecteur aléatoire de densité

$$f_{X,Y}(x, y) = Cxy$$

quand $0 \leq y \leq x \leq 1$.
Trouvons C. On sait que puisque $f_{X,Y}$ est une fonction de densité, alors

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1$$

ainsi on peut calculer directement (étant donné la forme de la fonction)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dxdy &= \int_0^1 \int_0^x Cxydydx \\
&= \int_0^1 Cx(\int_0^x ydy)dx \\
&= \int_0^1 Cx\frac{x^2}{2}dx \\
&= \frac{C}{2}\int_0^1 x^3dx \\
&= \frac{C}{8} \\
&= 1 \\
\Rightarrow C = 8.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant les fonctions de densité marginales :

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dy \\
&= 8x\int_0^x ydy \\
&= 8\frac{x^3}{2} \\
&= 4x^3.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx \\
&= 8y \int_0^1 x dx \\
&= \frac{8y}{2} \\
&= 4y.
\end{aligned}
$$

Pour travailler sur l'indépendance, on vérifie que

$$f_X(x) f_Y(y) = 4x^3 4y = 16x^3 y \neq f_{X,Y}(x,y)$$

ce qui nous montre que X et Y ne sont pas indépendantes.

4 Exercice IV

Soit ici X la variable aléatoire modélisant le résultat d'un lancé de dé à 6 faces équilibré.
Il est évident que f_1 approxime $\mathbb{P}(X = 4 \; ou \; X = 6)$. On a de même que f_2 approxime $\mathbb{P}(X \geq 4 \mid X \; pair)$.