E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES II
Devoir surveillé n^0 $2a$**, (Rattrapage)**
donné le 29 juin 2012
(Durée 2h.)
(Tout document, calculatrices et téléphones sont interdits)

I (7 *Pts.*)

Le budget du BDS (durant une année et en milliers d'Euros) est représenté par une variable aléatoire normale :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu = 5, \sigma^2 = 1)$$

1. Trouver la probabilité pour que cette association ait un budget supérieur à 7000 Euros par an.

   Afin d'enrichir leur cagnotte, les membres du BDS ont investi dans la vente de produits dérivés (T-shirt, casquette, chaussettes...). Ils achètent leurs produits chez un grossiste et ils les revendent ensuite aux élèves et aux professeurs.

   L'ensemble des différentes dépenses durant une année est représenté par une loi Normale
   $$Y \sim \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 0,69).$$
   Le gain de l'association est représenté par une variable aléatoire
   $$Z = X - Y.$$
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
3. Quelle est la probabilité pour que l'association ne présente pas de pertes à la fin de l'année ?

   Les élèves du BDS ont modélisé leur budget de l'année $2012 - 13$ par une nouvelle variable aléatoire G du type transformée de X :
   $$G = \exp(3X - 13)$$
4. Trouver le support de G.
5. Trouver la fonction de répartition de G en termes de la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite.
6. En déduire la fonction de densité de G en termes de la fonction de densité d'une variable aléatoire normale centrée réduite.
7. Quelle est la valeur α pour laquelle :
   $$P[G > \alpha] = 0,64$$

Indications :
- a) Si $\tilde{X}$ suit une loi Lognormale, de paramètres $(\mu,\ \sigma^2)$, la variable aléatoire $\tilde{Y} = \ln \tilde{X}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$.
- b) Vous pouvez inverser l'ordre des questions 5 et 6.
- c) $\sqrt{1,69} = 1,3;$ $\qquad \exp(0,926) = 2,52$

II (7 *Pts.*)

Soit D le disque sur $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon $R > 0$:

$$D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans D et dont la loi conjointe est la loi uniforme sur D c'est à dire donnée par :

$$f_{XY}(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & \text{si} \quad (x,\ y) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer les fonctions de densité marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

b) Calculer les espérances $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.

c) Calculer la covariance $\text{Cov}[X, Y]$.

d) Quelle conclusion peut-on en tirer des questions a) b) c) ?

III Simulation (6 *Pts.*)

1. Déterminer les lois de probabilité (support, fonction de masse, ou de densité) suivies par la variable aléatoire X, simulée par les algorithmes suivants.

   Vous pouvez utiliser une transformation appropriée de la variable aléatoire Uniforme $\mathcal{U}([0,\ 1])$.

   a)
   $$X \leftarrow\ E[3 \times\ random] \qquad \text{où } E[.] \text{ désigne la partie entière.}$$

   b)
   $$X \leftarrow\ 3 \times\ random$$

   Rappel : On rappelle que la fonction "*random*" réalise une simulation de la loi Uniforme $\mathcal{U}([0,\ 1])$.

2. Soit $\{X_n\}_{(n \in \mathbf{N}^*)}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

   On définit une nouvelle variable aléatoire Y par :

   $$Y = \inf\{k \in \mathbf{N}^*, \quad \text{tel que} \quad X_k = 1\}$$

   Quelle est la loi de Y (support, fonction de masse) ?

   b) Proposer un algorithme permettant de simuler cette loi.

   N.B. Les questions a) et b) peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

1 Tables

Variable aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0,\ 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

2 Table B_1

[1] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

3 Table B_2

[2] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 3.1

Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2)

1. Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.
2. Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999

I