

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**1^{re} Année Ingénieurs**

PROBABILITES II

Devoir surveillé n° 2,**donné le 11 mai 2012**

(Durée 2h.)

(Tout document, calculatrices et téléphones sont interdits)

I (6Pts.)

Tante Pauline (fameuse pour son excellente production de miel) trouve que les pucerons ont affreusement envahi son jardin cette année donc ses fleurs et forcément ses abeilles ne sont pas contentes du tout.

Après de longues études sérieuses son savant chimiste - jardinier a conclu que la distribution de la densité de ces pucerons noirs, sur la surface des feuilles et des pétales des fleurs, suit une loi Lognormale X avec paramètres μ et σ^2 , autrement dit la variable aléatoire $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- Déterminer : la fonction de densité et la fonction de répartition de X en termes de la fonction de répartition d'une loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Si $\mu = 2$ et $\sigma = 1$, trouver la probabilité pour que X soit inférieur à 12 (indication $\ln(12) = 2,485$)
- Le jardinier décide donc d'utiliser un produit liquide qui sème la panique dans la communauté des mauvais envahisseurs, et dont l'efficacité-densité par cm^3 correspond exactement à la moyenne m de la densité des pucerons. Déterminer cette densité moyenne m de X , en utilisant l'expression de la fonction génératrice $M_Y(t)$ de $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ rappelée ci-dessous :

$$M_Y(t) = \exp(\mu t + t^2 \sigma^2 / 2)$$

II (5Pts.)

- Soit X une variable aléatoire qui suit la loi Binômiale. Définir le support, la fonction de masse et calculer la fonction génératrice.
- Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson. Définir le support, la fonction de masse et calculer la fonction génératrice.
- Soit Z la variable aléatoire comptabilisant le nombre d'apparitions de la face 1 sur les 180 lancés d'un dé bien équilibré. Par quelles lois discrètes et par quelle loi continue peut-on modéliser ou approcher la loi de Z ? Calculer par ces trois lois la probabilité pour que la face 1 sorte :
 - entre 29 et 32 fois (bornes incluses)
 - entre 31 et 35 (bornes incluses)

III (5Pts.) On considère l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et le vecteur de probabilité (X, Y) défini sur cet espace ayant comme densité de probabilité conjointe :

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy & \forall 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Quelle doit-être la valeur de la constante C pour que f soit une bonne fonction de densité de probabilité conjointe pour le vecteur (X, Y) ?

- b) Evaluer la fonction de densité marginale de X , et la fonction de densité marginale de Y .
- c) Les variables aléatoires X, Y sont-elles indépendantes ?

IV (4Pts.) Simulation

Dans ce qui suit la fonction “Lancé” simule une variable uniforme discrète qui représente le lancé d’un dé équilibré à 6 faces. On considère les algorithmes suivants :

Algorithme 1

```

compteur ← 0
  Répéter 1000 fois
     $D \leftarrow$  Lancé
    Si  $D \geq 4$  et  $D$  pair, alors
      compteur ← compteur + 1
    FinSI
  FinRépéter
 $f_2 \leftarrow$  compteur/1000

```

Algorithme 2

```

compteur ← 0
  Répéter 1000 fois
    Répéter
       $D \leftarrow$  Lancé
      Jusqu'à ( $D$  pair)
      Si  $D \geq 4$  alors
        compteur ← compteur + 1
      FinSI
    FinRépéter
  FinRépéter
 $f_1 \leftarrow$  compteur/1000

```

Quelles probabilités (théoriques) les fréquences f_1, f_2 estiment-elles ? Justifier votre réponse.

1 Tables

Variable Aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0, 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

2 Table B_1

¹ Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var. normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

3 Table B_2

² Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, o x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 3.1

Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2)

1. Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh); avec la permission des auteurs et éditeurs.

2. Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936990	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999