E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.14
le 3 juin 2009

1

Monsieur le Prince a la mémoire qui flanche. Installé dans sa résidence de Fontainebleau il ne se souvient plus très bien de la chronologie de ses sept voyages. Quand il entame le récit de ses exploits, il commence toujours par le premier voyage et quand il atteint le septième, il achève son récit. Les étapes intermédiaires sont aléatoires :

A la fin du premier, il passe soit au second avec une probabilité de $0,8$, soit au cinquième ; quand le deuxième se termine, il enchaîne soit avec le troisième avec une probabilité de $0,6$, soit avec le cinquième avec une probabilité de $0,3$, soit avec le septième ; il passe du troisième au quatrième avec une probabilité de $0,9$ sinon au sixième ; il passe du quatrième au cinquième une fois sur deux sinon au sixième ; il répète le cinquième une fois sur trois, sinon il passe au sixième ; il passe du sixième au premier avec une probabilité de $0,2$, sinon il continue avec le septième.

a) S'agît-il d'une chaîne de Markov ? Représenter le diagramme de transition, déterminer la matrice de transition et les classes d'équivalence de cette chaîne de Markov. Y-a-t-il des états absorbants ?

b) Soit X_n le numéro du voyage du n^{me} récit. Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires X_1 et X_2. Calculer leurs espérances.
Déterminer la probabilité pour que son Altesse raconte tous ses voyages dans le bon ordre.

2

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle. Donner la définition générale de la fonction de densité, calculer la fonction génératrice , la fonction caractéristique, la fonction de répartition la moyenne et la variance de X.

ii) Toto est souvent en retard en moyenne de 15 minutes au cours de l'Analyse Numérique.
Soit T la variable aléatoire qui représente le temps de retard de Toto à son cours.
a) Exprimer la fonction de densité et la fonction de répartition de T.
b) Quelle est l'expression de la fonction de fiabilité des arrivées de Toto à l'EISTI ?
c) Sachant que le cours de l'Analyse Numérique a déjà commencé depuis 10 minutes, calculer la probabilité pour que Toto n'arrive qu' après les 8 minutes suivants.

iii)
Un navigateur solitaire traverse l'Atlantique à la rame dans une baignoire. Le temps T qu'il passe dans sa baignoire avant la première rencontre avec un pétrolier panaméen suit une loi de probabilité continue de moyenne 2 semaines. Trouver la fonction de répartition de T .
Sachant que notre navigateur a déjà ramé une semaine dans la solitude, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X (donc donner la fonction de répartition de X) qui représente le temps qu'il doit encore attendre avant de croiser un pétrolier panaméen.

3

– 1.
Dans une grande commune on suppose que le pourcentage moyen de myopes est de $0,01$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de myopes dans un échantillon de 200 personnes choisies au hasard.

a) En formalisant le problème d'après une variable aléatoire discrète, calculer la probabilité pour qu'il y ait moins de quatre myopes dans l'échantillon.

b) Une formalisation d'après une autre variable aléatoire discrète (approximation de la précédente) serait - elle possible ? Si oui, calculer de nouveau la probabilité demandée en a) et comparer vos deux résultats (si possible...).

c) Obtenir la moyenne et la variance de X d'après la loi de b). Donner la fonction de répartition correspondante.

d) Quelle serait cette probabilité si vous aviez modélisé le problème par une loi continue approximation des deux lois discrètes précédentes ?

– 2.
Le petit éléphant champion du cirque de Moscou fait des tours de piste formidables sur ses patins à roulettes avec probabilité $0,20$ de tomber. Quel devrait être le nombre total minimal de tours de ce champion patineur pour que la probabilité de faire “au moins 1 chute” serait supérieure à $0,90$?

4

Dans le cadre d'une enquête hospitalière on suppose connaître pour chaque sujet la cause de son décès :
– 1) décès lié au cancer des bronches,
– 2) décès lié à toute autre cause (accident, autre maladie, etc,...)
Pour les sujets de la première catégorie, on admet que la distribution du délai de survie X (exprimé en mois) suit une loi Lognormale d' espérance μ_X et de variance σ_X^2, c'est à dire que l'on peut trouver des constantes $a,\ x_0,\ b$, telles que la variable :

$$Y = a\ln(X - x_0) + b$$

suive une loi normale d'espérance μ_Y et de variance σ_Y^2.

a) Calculer μ_X en fonction de $a,\ x_0,\ b,\ \mu_Y,\ \sigma_Y$.

b) Pour étudier la moyenne des délais de survie sur un groupe de n sujets, revient -il au même de considérer les variables $\overline{X}$ Ü et $\overline{Y}$?

c) On admet maintenant que la transformation $Y = \ln X$ est telle que Y suit la loi $\mathcal{N}(1,8;\ 1)$.
Avant la fin de l'enquête on désire étudier le délai moyen de survie observé sur les 16 premiers sujets, tous décédés.
Quelle est la probabilité pour que $\overline{Y} > 2,8$?