E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.1
le 3 février 2009

1

i) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et si $\forall\, i \geq 1\ \ A_i \in\ \mathcal{A}$ alors

$$\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$$

ii) Soit $\{\mathcal{A}_i \quad i \in I\}$ une famille de tribus sur Ω où I est un ensemble d'indices quelconque. Montrer que $\bigcap_i\ A_i$ est aussi une tribu sur Ω.

iii). Soient $A,\ B$ sous-ensembles de Ω.

a) Décrire la tribu engendrée par A . Justifier votre réponse.

b) Décrire la tribu engendrée par A et B. Justifier votre réponse.

2

i) On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé et on observe les faces supérieures présentées après le lancer. En désignant les faces de la pièce par Π (pile) et F (face)respectivement et celles du dé par $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, déterminer l'espace échantillon (espace des états ou ensemble fondamental) associé à cette expérience aléatoire.

ii) Même question que précédemment pour l'expérience suivante : On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne 6 pour la troisième fois et l'on observe le nombre de lancers nécessaires pour atteindre ce but .

iii) Même question que précédemment pour l'expérience suivante : Pendant une période de temps donnée, on compte le nombre d'automobiles traversant le poste de péage d'un pont.

iv) Pour l'expérience du ii) décrire les sous-ensembles de Ω correspondant aux événements suivants :

a) Le troisième 6 apparaît au septième lancer.

b) Le troisième 6 est obtenu après le septième lancer mais avant le douzième.

c) Le troisième 6 n'est pas obtenu durant les cinq premiers lancers.

3

On lance deux dés et on observe le nombre de points sur la face supérieure de chaque dé. Représenter les événements suivants par les sous ensembles de l'espace échantillon.

i) Le nombre de points sur chaque face est supérieur à 3.

ii) Le nombre total de points est 8.

iii) Le nombre total de points est supérieur à 9.

iv) Sur chaque face, il y a un nombre pair de points .

v) Sur l'une des faces, il y a un nombre pair de points et, sur l'autre il y a plus de cinq points.

4

En utilisant les opérations de réunion d'intersection et de complément, représenter les événements suivants.

i) Au moins un des événements A, B se réalise.

ii) Les événements A, B se réalisent.

iii) Exactement un des événements A, B se réalise.

iv) Aucun des énénements A, B ne se réalise.

v) Au moins un des événements A, B, C se réalise.

vi) Au moins deux des événements A, B, C se réalisent.

vii) Exactement un des événements A, B, C ne se réalise pas.

viii) Exactement un des événements A, B, C se réalise .

ix) Aucun des événements A, B, C ne se réalise .

x) A ne se réalise pas mais au moins un des événements B, C se réalise.

xi) Les événements A, B, C se réalisent.

5

Pour un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

$$\text{si : } P[A] = 0,3, \ \ P[B] = 0,2 \ \text{ et } \ \ P[A \cap B] = 0,1$$

déterminer les probabilités des événements suivants :

i) Au moins un des événements $A,\ B$ se réalise.

ii) Aucun des événements $A,\ B$ ne se réalise.

iii) A ne se réalise pas mais B se réalise .

iv) Exactement un des événements $A,\ B$ se réalise.

6

Supposons que pour un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on a :

$$P[A] = \frac{1}{2}, \ \ P[B] = P[C] = \frac{1}{6},$$

où A, B, et C sont mutuellement exclusifs.

Evaluer les probabilités suivantes :

- a) $P[A^c \cap B^c]$;
- b) $P[A^c \cap B^c \cap C^c]$;
- c) $P[A^c \cap B^c \cap C]$;
- d) $P[B - A]$;
- e) La probabilité qu' exactement un des événements $A,\ B$ et C se réalise.

7

Pour un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si $\{A_1, A_2, ...\}$ est une suite finie ou dénombrable d'événements appartenant à $\mathcal{A}$,

i) Montrer l'inégalité de Boole :

$$P[\bigcup_i A_i] \leq \sum_i P[A_i]$$

ii) Montrer l'inégalité :

$$P[\bigcap_i A_i] \geq 1 - \sum_i P[A_i^c]$$

8

Supposons que pour un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on a :

$$P[A] = \frac{1}{2},\ \ P[B] = 0,1,\ P[C] = 0,3.$$

Si possible trouver la valeur exacte des probabilités suivantes.

Sinon, à partir de l'information disponible, déterminer les meilleures bornes inférieures et supérieures possibles et justifier vos conclusions.

- a) $P[B^c]$;
- b) $P[B \cup C]$;
- c) $P[A^c \cup B^c]$;
- d) $P[B \cap C] + P[B^c \cap C]$;
- e) $P[A \cap B^c]$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.2
le 10 février 2009

1

i) On s'intéresse au nombre de clients passants à une station de service durant une période de temps indéterminée.

Pour cette expérience aléatoire construire un espace probabilisé en définissant :

$$\forall \text{ événement élémentaire } \omega \in \Omega, \quad P[\{\omega\}] = \frac{e^{-1}}{\omega!}.$$

(Vérifier que P est une mesure de probabilité).

Calculer la probabilité de l'événement A suivant :

$A =$ {" au plus un client"}

ii)

Pour la même expérience définir la "probabilité élémentaire" par :

$$\forall \text{ événement élémentaire } \omega \in \Omega, \quad P[\{\omega\}] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\omega}}{\omega!},$$

où λ est un nombre réel positif.

Vérifier si P est vraiment une mesure de probabilité.

2

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes déterminer un espace échantillon permettant l'utilisation du modèle uniforme.

i) La répartition du sexe dans les familles comptant n enfants.

ii) Le lancer d'un dé équilibré n fois.

iii) Une main de k cartes distinctes d'un jeu de 52 cartes :
$(1 \leq k \ \leq 52)$.

iv) La répartition de 6 erreurs de frappe dans un texte de 7000 mots.

v) On analyse la répartition des accidents d'automobiles sur les ponts de la Seine au centre de Paris entre 10 heures et 11 heures chaque jour de la semaine.

On supposera que durant cette heure 3 accidents se produisent chaque jour de la semaine et qu'il n'arrive jamais plus d'un accident dans la même seconde.

3

Supposons que le modèle uniforme régisse l'expérience aléatoire consistant à engendrer les nombres
$00, 01, ..., 99$.

(On interprétera le nombre $0X$ comme étant X). Déterminer la probabilité des événements suivants :

i) Le nombre est supérieur à 81.

ii) Le nombre est inférieur à 31 et impair .

iii) Le nombre est divisible par 7 .

4

i) On lance un dé non truqué 12 fois. Quelle est la probabilité pour l'événement A défini par :
A = {"chaque face du dé se présente exactement deux fois"}

ii) Dans une urne contenant n boules distinctes, on choisit p boules au hasard et avec remise. Quelle est la probabilité pour l'événement A défini par :
A = {"toutes les boules choisies sont distinctes"}.

5

On choisit au hasard 3 jockeys parmi 10 afin de participer aux trois premières courses d'un programme.

Déterminer la probabilité :

a) que les trois jockeys soient différents,

b) qu'un jockey participe à exactement deux courses,

c) que le même jockey participe aux trois courses.

6

On choisit au hasard et avec remise 4 chiffres parmi $\{0, 1, ..., 9\}$.

Trouver la probabilité qu'un résultat contienne :

a) aucune répétition (4 chiffres différents),

b) une répétition (une paire et deux chiffres distincts),

c) deux répétitions (trois chiffres identiques ou deux paires),

d) trois répétitions (le même chiffre répété quatre fois).

7

a .) Un professeur distribue au hasard à ses 5 élèves leurs copies de devoirs.

Déterminer la probabilité pour que :

- i) chacun des 5 élèves reçoive la copie portant son nom.
- ii) l'élève Pierre reçoive sa copie.
- iii) l'élève Pierre et l'élève Paul reçoivent leur copie respective.
- iv) l'élève Pierre ou l'élève Paul reçoive sa copie.

b.) Dans un bureau le polycopieur tombe en panne 6 fois durant une semaine de 5 jours.

On s'intéresse à la répartition des pannes parmi les jours de la semaine en supposanrt que celles-ç se produisent au hasard.

En utilisant le modèle uniforme , calculer la probabilité de l'événement :

$$A = \text{"On a au moins une panne chaque jour"}$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.3
le 9 mars 2009

1

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n$ d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$ telle que : $P[B_1 \cap B_2 \ldots, \cap B_{n-1}] > 0$.

Montrer que :

$$P[\bigcap_{i=1}^{n} B_i] = P[B_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i]\ P[B_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} B_i] \ldots P[B_2|B_1]\ P[B_1]$$

2

On considère M cellules distinctes.

On distribue au hasard N boules dans les cellules $(N \leq M)$ et on s'intéresse à l'événement A :

$$A = \{\text{“les } N \text{ premières cellules sont occupées” }\}.$$

Calculer (d'après le modèle uniforme) la probabilité $P[A]$ dans les cas suivants :

a.1) Les N boules sont distinctes et on accepte plus d'une boule dans une même cellule.

a.2) Les N boules sont distinctes et on n'accepte pas plus d'une boule dans une même cellule.

b.1) Les N boules sont identiques et on accepte plus d'une boule dans une même cellule.

b.2) Les N boules sont identiques mais on ne permet pas la répétition des boules dans une cellule.

3

On lance un dé et on associe à cette expérience aléatoire l'espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ avec la mesure de probabilité P définie par :

ω	1	2	3	4	5	6
$P[\{\omega\}]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Considérer les événements A et B définis par :

A = {“un résultat inférieur à 5” } ;

B = { “un résultat pair ” } Déterminer l'espace de probabilité conditionnelle par rapport à B, $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$, et calculer la probabilité conditionnelle $P[A|B]$.

4

On tire au hasard deux des chiffres de 1 à 9 . Sachant que la somme obtenue est paire, calculer la probabilité P pour que les deux chiffres soient impairs.

5

- **i)**
  Soient : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité , X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et F_X, p_x , la fonction de répartition et la fonction de masse correspondantes.
  Montrer les propriétés suivantes :
  a) $0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
  b) F_X est non décroissante.
  c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad et \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  d) F_X est continue à droite.
  e) $\lim\limits_{y \to x,\ y < x} F_X(y) = F_X(x) - p_X(x)$.

- **ii)**
  Soient : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité , X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et F_X, p_x , la fonction de répartition et la fonction de masse correspondantes.
  Montrer les propriétés suivantes (calcul de la probabilité pour que X prenne une valeur dans un intervalle quelconque à l'aide de F_X et de p_x) pour tout $a,\ b\ \in\ \mathbb{R}$ avec $a\ <\ b$:
  a) $P_X[\,]a,\ b]\,] = F_X(b) -\ F_X(a)$;
  b) $P_X[\,]a,\ b[\,] = F_X(b)\ -\ F_X(a) - p_X(b)$
  c) $P_X[\,[a,\ b[\,] = F_X(b)\ -\ F_X(a) + p_X(a) - p_X(b)$
  d) $P_X[\,[a,\ b]\,] = F_X(b)\ -\ F_X(a) + p_X(a)$
  e) $P_X[\,]a,\ \infty[\,] =\ 1 - F_X(a)$
  f) $P_X[\,[a,\ \infty[\,] =\ 1 - F_X(a)\ +\ p_X(a)$
  g) $P_X[\,]-\infty,\ b[\,] = F_X(b) - p_X(b)$

6

Soit l'expérience aléatoire de l' observation du temps de fonctionnement T (en jours) d'une certaine machine **avant la première panne**. On lui associe l'espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ avec :

$$\Omega = [0,\ +\infty[; \quad \mathcal{A} = \mathcal{R}_{[0,+\infty[}$$

et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on définit la probabilité :

$$P[A] = \frac{1}{5}\int_A \exp(-\frac{t}{5})dt$$

i) Soit B l'événement :
{"plus de 8 jours de fonctionnement avant la première panne"}.
Calculer la probabilité $P[B]$.
Si la machine fonctionne depuis 8 jours sans panne, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne entre 10 et 12 jours sans panne ?

ii) Soit D l'événement :
{"plus de 10 jours de fonctionnement avant la première panne"}.
Calculer la probabilité $P[D|B]$.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.4
le 16 mars 2009

1

i)

Soient les événements :

A= {"une famille a des enfants des deux sexes"} et

B= {"une famille a au plus un garçon"}

a) Montrer que A et B sont des événements indépendants si une famille a trois enfants.

b) Montrer que A et B sont des événements dépendants si une famille a deux enfants.

ii) On jette trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

Considérons les événements :

A = {"le premier jet donne face"} ;

B = {"le second jet donne face"} ;

C = {"deux jets consécutifs donnent face"}

Etudier l'indépendance ou dépendance (deux à deux) de ces événements.

2

i) Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\mathbb{R}, \ \mathcal{R})$ avec fonction de densité f_X symétrique par rapport à un point $c \in \mathbb{R}$.

Montrer que si l'espérance μ_X existe alors $\mu_X = c$

ii) Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\mathbb{R}, \ \mathcal{R})$, et telle que la fonction $h(c) = E[(X-c)^2]$ existe pour tout $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction h admet un minimum pour $c = \mu_x$.

iii)

– a) Soit X la variable aléatoire qui représente la note des étudiants à un examen. Si la moyenne et l'écart type sont 74 et 12 respectivement, calculer les résultats en unités centrées réduites des étudiants ayant obtenu les notes :

$$65; \quad 74; \quad 86; \quad 92.$$

– b) Reprendre l'expérience précédente, et calculer les notes correspondantes aux résultats centrés réduits suivants :

$$-1; \quad 0,5; \quad 1,25; \quad 1,75.$$

3

On a volé la Joconde. Deux ans plus tard en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa.

Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour que ça soit celle que Léonard a peinte.

On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance.

Le premier qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique.

Le deuxième qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes.

Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

4

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois une pièce de monnaie bien equilibrée et définissons la variable aléatoire X comme étant le nombre de piles obtenues.

a) Déterminer l'espace image de la variable aléatoire X .

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c) Donner la fonction de répartition F_X et la fonction de masse p_X et tracer leur graphiques.

5

Un joueur lance un dé équilibré et gagne 10 euros si le résultat est pair, il perd 10 euros si le résultat est "1", ou "3" et ne perd ou ne gagne rien si le résultat est "5". Décrire la variable aléatoire représentant le gain du joueur ainsi que sa loi de probabilité.

Donner la fonction de répartition, la fonction de masse et tracer leurs graphiques.

Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.5
le 24 mars 2009

1

i) Les probabilités pour que trois tireurs atteignent une cible sont respectivement :

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3}.$$

Chacun tire une seule fois sur la cible.

a) Calculer la probabilité P pour que l'un d'eux exactement atteigne la cible.

b) Si seulement l'un d'eux a atteint la cible, quelle est la probabilité pourqu'il s'agisse du premier tireur ?

ii) On considère un système équipé d'un détecteur de panne.

On établit les constatations suivantes, de facon empirique :

- S'il y a panne, elle est détectée avec 95% de réussite .

- S'il n' y a pas de panne, l' alerte de détection fonctionne avec une probabilité de 6%.

- Une panne apparait avec une probabilité de 2%. Si l'alerte est donnée, avec quelle probabilité peut-on affirmer qu'elle ne correspond pas à une panne ? Commenter votre résultat.

iii) On choisit au hasard et sans remise trois boules d'une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules noires.

Si X représente le nombre de boules rouges dans l'échantillon choisi, vérifier que X est bien une variable aléatoire. Décrire la loi de probabilité de X. Donner la fonction de répartition, la fonction de masse et tracer leurs graphiques. Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire.

2

Le 14 juillet à Saint Troupaize, il fait beau sept fois sur dix.

Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévisions météorologiques indépendantes :

- La météo nationale, qui se trompe deux fois sur cent.
- Une grenouille verte, qui se trompe une fois sur vingt.

La météo annonce de la pluie, alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. **Quel est le temps le plus probable ?**

3

Soit l'expérience aléatoire de l' observation du **temps d'attente** (en min.) pour l'arrivée d'un autobus à une intersection.

On associe à ce phénomène aléatoire l'espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ avec :

$$\Omega = [0,\ 8]; \quad \mathcal{A} = \mathcal{R}_{[0,8]}$$

et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on définit la probabilité :

$$P[A] = \int_A f(t)dt \quad \text{où} \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{16} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 4 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{16} & \text{si} \quad 4 < t \leq 8 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(Vérifier que P est effectivement une mesure de probabilité).
Un individu attend l'autobus depuis déjà deux minutes.

i) Déterminer l'espace de probabilité conditionnelle pour le temps que cet individu devra encore attendre.

ii) Trouver la probabilité qu'il doive attendre encore moins de 5 minutes.

4

Soient deux boîtes A et B qui contiennent respectivement 8 transistors dont 3 sont défectueux et 5 transistors dont 2 sont défectueux.
Un transistor est tiré aléatoirement de chaque boîte.

a) Quelle est la probabilité pour que l'un des deux transistors soit en bon état et l'autre défectueux ?

b) Dans le cas étudié en a) quelle est la probabilité pour que le transistor défectueux soit tiré de la boîte A ?

5

i)

On considère l'espace probabilisable $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$ et la fonction,
$P:\ \mathbb{R} \rightarrow\ \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\ A \in \mathcal{R} \qquad P(A) = \frac{1}{2}\int_A e^{-|t|}\,dt$$

- a) Montrer que P est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$.
- b) Montrer que la fonction $X:\ \mathbb{R} \rightarrow\ \mathbb{R}$ définie par :
  $X(\omega) = 2\omega \qquad \forall\,\omega \in \mathbb{R}$
  est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$
- c) Quelle est la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition associée F_X ?

ii) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$ avec fonction de densité :

$$\forall \quad x \in\ \mathbb{R},\ \ f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

- a) Déterminer le support, la fonction de répartition, la moyenne et la variance de X.
- b) Calculer :

$$P[\{|X| > 2\}],\ \ P[\{|X| < 1\}],\ \ P[\{X < -3\}],$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.6
le 30 mars 2009

1

Quand on téléphone entre 18 heures et 19 heures chez Toto, on a neuf chances sur dix de tomber sur son répondeur.

Il utilise cet interlocuteur électronique lorsqu'il est là deux fois sur trois pour ne pas avoir à répondre à des oppurtuns. Quand il est absent, il l' utilise toujours ;

a) Calculer la probabilité de téléphoner lorsqu'il est là.

b) On tombe sur le répondeur, calculer la probabilité pour qu'il soit là.

2

1. Déterminer la **moyenne** et la **variance** d'une variable aléatoire Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer sa **fonction caractéristique** et sa **fonction génératrice**.
2. La probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est $\frac{1}{4}$.

   i) En supposant qu'il tire 7 fois quelle est la probabilité P pour qu'il atteigne la cible au moins deux fois ?

   ii) Combien de fois doit-il tirer, pour que la probabilité qu' il atteigne la cible au moins 1 fois, soit plus grande que $\frac{2}{3}$?

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.7
le 6 avril 2009

1

i) Soit X une variable aléatoire continue avec support $C_X =]-a,\ a[$ où $a > 0$ et fonction de densité f_X.
Montrer que si $\phi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = X^2 = \phi(X)$ est une variable aléatoire, alors Y est une variable aléatoire continue ; déterminer le support $C_Y = \phi(C_X)$ et la fonction de densité f_Y. Calculer l'espérance et la variance. Appliquer pour :

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{1}{2a} & \text{si} & x \in]-a,\ a\ [\\ & & \\ 0 & & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

ii) Soit X une variable aléatoire avec fonction de densité :

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-x} & \text{si} & x \in]0,\ +\infty\ [\\ & & \\ 0 & & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

Déterminer le support et la fonction de densité de la variable aléatoire suivante : $Y = \phi(X) = e^{-X}$

2

Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$ qui représente la durée de service d'une pièce d'equipement ; vérifier que f_X définie ci-dessous est une bonne fonction de densité de probabilité qu'on associera à X :

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} (0,001)e^{-(0,001)x} & si & x > 0 \\ & & \\ 0 & & ailleurs \end{array} \right\}$$

i) Déterminer la fonction de répartition.

ii) Déterminer la moyenne et la variance.

iii) Déterminer la probabilité que la pièce d'équipement dure :

- a) plus de 1000 heures,
- b) exactement 1000 heures,
- c) entre 800 et 1200 heures,
- d) moins de 100 heures.

3

Pour la variable aléatoire X qui représente le nombre d'appels téléphoniques reçus à une centrale durant une période de temps donnée, l'ensemble des valeurs observables est $\{0, 1, 2, ...\}$.

On considère une fonction de masse pour X, de la forme :

$$p_X(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & si & x \in \{0,\ 1,\ 2, , ...\} \\ & & \\ 0 & & ailleurs \end{array} \right\}$$

où λ est un nombre réel positif.

Déterminer le support de la variable aléatoire X. Est-elle discrète ? Connaissez-vous son nom ?

Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire.

4

i) Obtenir la **loi de Poisson comme limite de la loi Binomiale**.

ii) Dans une grande ville 5% des gens sont âgés de plus de 80 ans. On choisit au hasard 20 personnes dans cette ville.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes âgés de plus de 80 ans parmi les 20 personnes choisis.

- a) En formalisant le problème d'après une variable aléatoire discrète, calculer la probabilité pour que moins de 2 personnes parmi les 20 choisies sont âgées de plus de 80 ans.
- b) Est-ce qu'une formalisation différente serait possible (comme approximation de la précédente) ?

  Si oui, calculer de nouveau la probabilité demandée en a), et comparer vos deux résultats. (Commenter vos conclusions).

5

Dans une école d'ingénieurs, on suppose que le résultat (sur 100) à un examen de probabilités est aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(70,\ 196)$.

On désire diviser en quatre classes les résultats des étudiants qui se présentent au prochain examen, en supposant que les nombres réels positifs $C_1,\ C_2,\ C_3$, vérifient, $C_1\ >\ C_2\ > C_3$:

$A = \{$ "Un résultat supérieur ou égal à C_1" $\}$

$B = \{$ "Un résultat inférieur à C_1, mais supérieur ou égal à C_2" $\}$

$C = \{$ "Un résultat inférieur à C_2, mais supérieur ou égal à C_3" $\}$

$D = \{$ "Un résultat inférieur à C_3" $\}$

Déterminer les constantes $C_1,\ C_2,\ C_3$ afin que les classes $A,\ B,\ C,\ D$ contiennent respectivement $10\%,\ 30\%\ 45\%,\ 15\%$ des étudiants respectivement.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.8
le 14 avril 2009

1

Les professeurs de l'EISTI ont souvent remarqué des pannes concernant les projections aux écrans du Grand Amphi. Habituellement on constate 3 principales raisons : dans 60% des cas la panne provient d'un des projecteurs alors que celle qui est due à un faux contact des câbles survient dans 20% des cas ; le reste de ces problèmes est dû à la lampe du rétroprojecteur. Ces pannes s'expriment par l'extinction de l'image sur la partie gauche ou sur la partie droite de l'écran.

Les nombreuses observations donnent probabilité de $0,3$ pour la disparition de l'image à droite si la panne provient du projecteur, alors que la disparition de l'image sur la partie gauche de l'ecran survient avec probabilité 0.8 si la panne provient du rétroprojecteur, et une probabilité $0,9$ si le problème est dû aux câbles.

Si pendant le cours de Physique l'image disparaît sur la partie gauche de l'ecran quelle est la probabilité pour que la panne provienne d'un mauvais contact des câbles ?

2

On jette 180 fois un dé bien équilibré. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de fois qu' on obtient la face 6.

a) En formalisant le problème d'après une variable aléatoire discrète, calculer la probabilité pour que la face 6 sorte entre 29 et 32 fois (bornes incluses)

b) Une formalisation d'après une variable aléatoire différente (approximation de la précédente) serait - elle possible ? Si oui, calculer à nouveau les probabilités demandées en a) et comparer vos deux résultats (si possible).

c) Obtenir la moyenne et la variance de X d'après la loi de b).

3

Un joueur lance deux dés équilibrés et il observe la somme des résultats sur les dés. Le joueur est déclaré gagnant s'il obtient un 7 ou un 11 et perdant s'il obtient un 2 ou un 12. Tout autre résultat n'implique aucun jugement.

a) Déterminer l'espace de probabilité initial de l' expérience aléatoire du lancement des deux dés.

b) Soit X la variable aléatoire qui représente le somme des résultats sur les 2 dés. Déterminer l'espace de probabilité induit par cette variable aléatoire X son support et sa fonction de masse.

c) Soit Y la variable aléatoire qui représente le gain du joueur. Si le joueur gagne ou perd 10 euros selon le cas, déterminer le support de cette nouvelle variable. Trouver la fonction de masse et la fonction de répartition de Y. Donner les représentations graphiques correspondantes.

d) Déterminer l'espérance mathématique du gain du joueur.

e) Si le joueur gagne 10 euros mais perd x euros, déterminer x afin que le jeu soit honnête, c'est à dire, que l'espérance mathématique du gain soit nulle.

4

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.

Déterminer :

- a) sa fonctionnelle génératrice $M_X(t)$ et sa fonction caractéristique $\Phi_X(\omega)$,
- b) sa moyenne μ (Espérance)
- c) sa variance σ^2.
- d) sa fonction de répartition.

ii) Un appareil fonctionne au moins deux heures sans panne. Après deux heures de fonctionnement, sa fonction de fiabilité est donnée par :

$$\phi(t) = e^{-(0,1)t}$$

- a) Donner la fonction de densité de la variable aléatoire T qui représente le temps de fonctionnement de l'appareil avant la première panne.
- b) En appliquant les résultats du i) trouver la fonction de répartition la moyenne et la variance de T.
- c) Quelle est la relation entre la fonction de répartition et la fiabilité de l'appareil ?

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.9
le 28 avril 2009

1

La desserte de travail de Toto possède trois tiroirs contenant chacun des disquettes formatées pour un Mac et des disquettes formatées pour un PC qui sont indiscernables au toucher.

Dans le premier tiroir, il y a 5 disquettes pour le Macintosh et 4 disquettes pour le PC. Dans le deuxième tiroir, il y a 9 disquettes pour le Mac et 3 disquettes pour le PC. Dans le troisième tiroir, il y a 3 disquettes pour le Mac et 7 disquettes pour le PC.

Quand on ouvre un tiroir au hasard : La probabilité d'ouvrir le premier tiroir est égale à 0,3 alors que la probabilité d'ouvrir le deuxième tiroir est égale à 0,5.

a) On ouvre le premier tiroir et on prend deux disquettes au hasard dans ce tiroir. Calculer la probabilité de prendre deux disquettes pour Macintosh. Calculer la probabilité de prendre deux disquettes différentes.

b) On ouvre un tiroir au hasard et on prend deux disquettes au hasard dans ce tiroir. Calculer la probabilité de prendre deux disquettes différentes.

c) On ouvre un tiroir au hasard et on prend une disquette au hasard dans ce tiroir. Sachant que la disquette est pour le Mac, calculer la probabilité d'avoir ouvert le premier tiroir.

2

La note en Informatique des étudiants de la 2^{me} année ingénieurs dans une grande école est modélisée d'après une variable aléatoire X normale de moyenne 15 et d'écart type égal à 2.

Quelle est la probabilité pour que la note d'un étudiant prise au hasard soit supérieure à 17 ?

3

i) Soit une variable aléatoire Y qui suit une loi Lognormale avec paramètres μ et σ^2 . (Rappel : la variable aléatoire $X = \ln Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

a) Montrer que la fonction de densité de Y est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{cc} f_Y(y) = \dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{(lny-\mu)^2}{2\sigma^2}) & si \quad y > 0 \\ \\ 0 \qquad \text{ailleurs} & \end{array} \right\}$$

b) Exprimer la fonction de répartition de Y en termes de la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

c) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

ii) La taille (en millimètres) des grains de sable d'un certain type suit une loi Lognormale avec paramètres : $\mu = 0,05$ et $\sigma^2 = 0,01$.

- a) Déterminer la taille moyenne de ces grains.
- b) Déterminer la proportion de ceux -ci ayant une taille inférieure à un milimètre.

4

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.

Déterminer :

- a) sa fonctionnelle génératrice $M_X(t)$ et sa fonction caractéristique $\Phi_X(\omega)$,
- b) sa moyenne μ (Espérance)
- c) sa variance σ^2.
- d) sa fonction de répartition.

ii) Un appareil fonctionne au moins deux heures sans panne. Après deux heures de fonctionnement, sa fonction de fiabilité est donnée par :

$$\phi(t) = e^{-(0,1)t}$$

- a) Donner la fonction de densité de la variable aléatoire T qui représente le temps de fonctionnement de l'appareil avant la première panne.
- b) En appliquant les résultats du i) trouver la fonction de répartition la moyenne et la variance de T.
- c) Quelle est la relation entre la fonction de répartition et la fiabilité de l'appareil ?

iii) Juliette emprunte quotidiennement la ligne A du RER (pour aller de la gare de Lyon à l' $E.I.S.T.I$) et elle est souvent en retard à cause des "problèmes techniques" du train.

Les responsables ont informé Juliette sur la fiabilité des horaires affichés, en lui affirmant qu'il faut qu'elle prévoit en moyenne 10 minutes de retard chaque fois qu'elle prend le RER A. Déterminer l'espace fondamental Ω de ce phénomène aléatoire.

i) Soit T la variable aléatoire qui représente le temps de retard du train. Est-elle continue ou discrète ?

Pourriez- vous définir son support ?

Vérifier que la fonction suivante $f_T : R \rightarrow \mathbb{R}$ est une bonne fonction de densité pour la variable aléatoire T, et qu' elle correspond bien au support que vous proposez.

$$f_T(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} (0,1)e^{-(0,1)t} & si & t > 0 \\ & & \\ 0 & & ailleurs \end{array} \right\}$$

ii) Déterminer la fonction de répartition de T, et vérifier bien ses principales propriétés.

iii) Sachant que le train a déjà un retard de 8 minutes, déterminer la probabilité pour que Juliette attende encore 5 minutes de plus.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.10
le 6 mai 2009

1

On a souvent remarqué que les notes des candidats au concours des grandes écoles suivent une loi Normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La règle d'évaluation est la suivante : On donne la note A aux étudiants dont le score est supérieur à $\mu + \sigma$ et la note B à ceux dont le score est compris entre μ et $\mu + \sigma$. Trouver :

a) Le pourcentage des candidats qui recevront la note A,

b) Le pourcentage des candidats qui recevront la note B.

2

Une machine fabrique des vis ayant comme diamètre une variable aléatoire normale de moyenne $10\ mm$ et d'écart type de $1\ mm$.

Une autre machine fabrique des écrous ayant comme diamètre une variable aléatoire normale de moyenne $11\ mm$ et d'écart type de $0,5\ mm$.

En choisissant au hasard une vis et un ecrou, quellle est la probabilité pour que la vis rentre dans l'écrou.

3

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.
Déterminer :
- a) sa fonctionnelle génératrice $M_X(t)$ et sa fonction caractéristique $\Phi_X(\omega)$,
- b) sa moyenne μ (Espérance)
- c) sa variance σ^2.

ii) Le chef de l'orchestre philarmonique de Metropolitan Opera de New York, est très ennuyé aujourd'hui car le premier violon est déjà en retard de 6 minutes par rapport au rendez-vous fixé à $20\ h$ pour la répétition générale. Ses collègues savent déjà que ses retards (qui sont fréquents) sont en moyenne de 10 min. Soit T la variable aléatoire qui représente le temps de retard du violoniste.

a) En précisant convenablement les constantes θ et ν montrer que la fonction f_T ci-dessous est une bonne fonction de densité pour la variable aléatoire T ; donner le nom de la loi correspondante, son support et calculer sa fonction de répartition :

$$f_T(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} \theta e^{-\theta\ (t-\nu)} & si & t > \nu \\ & & \\ 0 & & ailleurs \end{array} \right\}$$

b) Quelle est la probabilité, pour que le violoniste arrive finalement après $20h$ 20 ?

iii) Une photocopieuse fonctionne au moins 4 jours sans panne ; la fiabilité de cette machine est donnée par :

$$\phi(t) = e^{-(0,2)t}$$

- a) Donner la fonction de densité de la variable aléatoire T qui représente le temps de fonctionnement de la machine avant la première panne.
  Calculer la moyenne et la variance de T.

– b) Déterminer la fonction de répartition correspondante et donner sa représentation graphique. Donner son interprétation en termes de la fiabilité.

4

Les statistiques récentes de certains vétérinaires passionnés ont montré que parmi les beaux chats d'Angora le pourcentage moyen d'avoir un oeil bleu et l'autre vert est de $0,01$.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de chats aux yeux bicolors dans un échantillon de 200 chats d'Angora choisis au hasard.

a) En formalisant le problème d'après une variable aléatoire discrète, calculer la probabilité pour qu'il y ait moins de quatre chats aux yeux bicolors dans l'échantillon.

b) Une formalisation d'après une variable aléatoire différente (approximation de la précédente) serait - elle possible ? Si oui, calculer de nouveau la probabilité demandée en a) et comparer vos deux résultats.

c) Donner la moyenne et la variance de X d'après la loi de b).

d) Pourriez vous calculer la même probabilité par une loi continue qui serait approximation des précédentes ?

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.11
le 13 mai 2009

1

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.

Déterminer :
- a) sa fonctionnelle génératrice $M_X(t)$ et sa fonction caractéristique $\Phi_X(\omega)$,
- b) sa moyenne μ (Espérance)
- c) sa variance σ^2.

ii)

La Belle au Bois Dormant est assise devant la cheminée, sa quenouille à la main. L'intervalle de temps T, exprimé en minutes, qui sépare l'instant où elle a pris place pour filer la laine de celui où elle va se piquer avec le fuseau suit une loi continue de moyenne $E(T) = 10$.

Trouver la loi correspondante de T, exprimer la fonction de densité et sa fonction de répartition. Calculer l'écart type.

Sachant qu'il ne lui est rien arrivé pendant les huit premières minutes calculer la probabilité pour qu'elle ne se pique pas dans les cinq minutes qui suivent.

2

Pénélope essuie les verres au fond du café et dans ce décor elle a remarqué qu'un client sur quatre laissait un pourboire au comptoir.

a) Soit X la variable aléatoire représentant le pourcentage de consommateurs qui laissent un pourboire au comptoir. Etablir la loi de la variable aléatoire X. Déterminer la moyenne et la variance de X. Calculer la fonction caractéristique et la fonction génératrice correspondantes.

b) Pour 1000 clients, soit Y la var. aléatoire qui représente le nombre de clients qui laissent un pourboire.

Etablir la loi de la variable aléatoire Y. Pour quelles lois discrètes et par quelle loi continue peut-on modéliser ou approcher la loi de Y?

Calculer par deux de ces trois lois la probabilité :

$$P(245 < Y < 255).$$

3

Les trois mousquetaires (donc quatre personnes) ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'Auberge.

D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard.

Calculer la probabilité pour que :

a) les deux bottes soient les siennes,

b) les deux bottes forment une paire,

c) les deux bottes soient deux pieds droits,

d) les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes.

4

Dans un lot d'objets le poids d'un objet suit une loi normale avec moyenne 120 et variance 100. Trouver la fonctionnelle génératrice et la fonction caractéristique de cette variable aléatoire (poids).

a) Si un groupe de 25 objets est choisi au hasard quelle est la probabilité pour que le poids moyen du groupe soit supérieur à 125 ?

b) Si deux groupes de 25 objets chacun sont choisis au hasard , quelle est la probabilité que la moyenne des poids pour les deux groupes diffère plus que de 5 ?

5

A la suite de nombreuses observations scientifiques durant les cinq dernières années on a pu conclure que le nombre d'apparitions de tremblements de terre par an, suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec :

$$P[\{X \geq 3\}] = 0,8413$$
$$P[\{X \geq 9\}] = 0,0228$$

Déterminer le nombre moyen de tremblements de terre par an ainsi que la variance σ^2.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.12
le 20 mai 2009

1

Les demi-finales de cet hiver au championnat du ski alpin sur les deux parcours A et B des Hautes Alpes sont organisés d'après les résultats statistiques des cinq dernières années.

Les skieurs choisissent au hasard (equiprobabilité)entre les deux parcours qui comportent chacun deux étapes en tenant compte des informations suivantes : Sur la première étape du parcours A il y a une probabilité de $0,80$ de faire une chute, alors que sur la première étape du parcours B il y a une probabilité de $0,70$ de tomber.

Sur la deuxième étape du parcours A il y a une probabilité de $0,30$ de ne pas tomber, si le skieur n'est pas tombé à la première étape et une chance de $0,10$ de ne pas tomber, si il a déjà fait une chute durant la première étape.

Sur la deuxième étape du parcours B le skieur a aussi une chance de $0,10$ de ne pas tomber si il a déjà fait une chute durant la première étape, et une probabilité de $0,70$ de tomber si il n'a pas fait une chute pendant la première étape du parcours. Les candidats sont éliminés, si ils font au moins deux chutes sur le parcours choisi. Pour un skieur pris au hasard :

a) Quelle est la probabilité qu'un candidat soit éliminé ?

b) Si le skieur a été éliminé quelle est la probabilité qu'il ait emprunté le parcours B ?

2

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle. Déterminer :
- a La fonction génératrice et la fonction caractéristique.
- b) la moyenne μ,
- c) la variance σ^2

ii) Un sous-marin nucléaire voyage en plongée (lorsqu'il joue à la bataille navale !). Il doit néanmoins faire surface pour renouveler l'atmosphère . La durée d'une plongée en jours suit une loi exponentielle de paramètre θ. En dépouillant tous les livres de bord, on constate que 0,88 des plongées ont duré plus de six jours.

a) Définir la fonction de répartition de la variable aléatoire qui représente la durée de la plongée en jours et donner une estimation du paramètre θ.

b) Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse une semaine.

c) Sachant que le sous marin évolue immergé depuis une semaine, calculer la probabilité pour que la durée de la plongée dépasse dix jours.

3

Frédéric téléphone fréquemment. La durée de ses consommations est représentée par une variable aléatoire X qui suit la loi Lognormale avec paramètres : μ et σ^2.
(Rappel : La variable aléatoire suit $Y = \ln X$ suit une loi normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)

a) Déterminer la fonction de densité de X et la durée moyenne de communications de Frédéric.

b) Exprimer la fonction de répartition de X en termes de la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite et calculer la probabilité pour que la durée d'une de ses conversations dépasse les x_0 minutes.

4

(i) Un joueur possède 2 euros. Il parie un euro à la fois et a 0.50 de chances de gagner 1 euro.

Il arrête de jouer lorsqu'il perd les 2 euros ou gagne 4 euros.

a) S'agît-il d'une chaîne de Markov ? Justifier votre réponse.

b) Trouver les états de la chaîne. Faire le graphe et la matrice de transition correspondants.

c) Quelle est la probabilité pour qu'il perde son argent après 5 parties au plus ?

d) Quelle est la probabilité pour que le jeu dure plus que 7 parties ?

(ii) Deux garçons g_1 et g_2 et deux filles f_1 et f_2 jouent au ballon. Chaque garçon lance le ballon à l'autre garçon avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et à chaque fille avec la probabilité $\frac{1}{4}$. Par contre, une fille lance le ballon à chaque garçon avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et ne lance jamais à l'autre fille.

a) Montrer que ce problème peut se modéliser à l'aide d'une chaîne de Markov homogène. Déterminer : Le graphe et la matrice de transition.

b) Quelle est la fréquence limite de réception du ballon de chaque garçon et de chaque fille ? S'agît-il d'une chaîne ergodique ? Pourquoi ?

5

Considérons n mesures indépendantes $X_1, X_2, ... X_n$ de l'énergie moyenne μ d'un faisceau de particules à l'intérieur d'un accélérateur.

On utilise la moyenne empirique $\overline{X}$ de ces mesures comme une estimation de μ.

Supposons que $\forall\ i,\ \ X_i$ suit une loi de probabilité de moyenne μ et d'écart type 1. Quel est le nombre minimal n de mesures à effectuer, afin que l'erreur de l'estimation soit au plus égale à $0,095$, avec une probabilité de $0,9$?

1 Tables

Variable aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

2 Table B_1

[1] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

[1]Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

3 Table B_2

[2] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 0.1

Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2

[2]Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.09000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.53590
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.57530
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.61410
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.65170
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.68790
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.72240
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.75490
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.78520
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.81330
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.83890
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.86610
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.88300
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.90147
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.91774
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.93189
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.94408
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.95449
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.96327
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.97062
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.97670
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.98169
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.98574
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.98899
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.99157
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.99361
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.99520
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.99642
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.99736
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.99807
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.99860
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.99899

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.13
le 27 mai 2009

1

Boris mange des noisettes. Cette année on a une probabilité de $0,20$ de trouver des noisettes véreuses. Boris ne supporte pas de tomber sur 3 noisettes véreuses consécutives : il en perd l'appétit.

a) Définir : - Le processus de Markov correspondant à la consommation de noisettes. - Le graphe et la matrice de transition. - Les différentes classes et leurs propriétés. Reconnaitre (s' il y en a) les états absorbants.

b) Calculer la probabilité de casser plus de 5 noisettes.

2

Considérons n mesures indépendantes $X_1, X_2, ... X_n$ de l'énergie moyenne μ d'un faisceau de particules à l'intérieur d'un accélérateur.

On utilise la moyenne empirique $\overline{X}$ de ces mesures comme une estimation de μ.

Supposons que $\forall\ i,\ \ X_i$ suit une loi de probabilité de moyenne μ et d'écart type 1. Quel est le nombre minimal n de mesures à effectuer, afin que l'erreur de l'estimation soit au plus égale à $0,095$, avec une probabilité de $0,9$?

3

L'Académie des Sciences en France est composée de quarante académiciens : trente huit hommes et deux femmes. Tous les hommes, ainsi qu'une femme qui parle russe, portent une épée. Deux hommes parlent russe.

Une délégation de cinq académiciens est choisie au hasard pour une visite officielle à Moscou.

a) Calculer la probabilité d'avoir une femme dans la délégation.

b) Sachant qu'il y a au moins une femme, calculer la probabilité pour qu'il y ait cinq porteurs d'épée.

c) Sachant qu'il y a une femme, calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins deux académiciens parlant russe.

4

i) Le budget d'une entreprise (durant une année) exprimé en millions d' Euros, est modélisé d'après une variable aléatoire normale X de moyenne 10 et d'écart type égal à 1. D'après certaines études statistiques par les experts de la société, l'ensemble des différents coûts durant une année peuvent se représenter par une variable aléatoire normale Y, de moyenne 8 et de variance $0,44$. Si on définit le gain de l'entreprise par une variable aléatoire : $Z = X - Y$,

   a) quelle est la probabilité pour que la société ne présente pas de pertes à la fin de l'année ?

   b) quelle est la probabilité pour que le gain soit supérieur à $2,5$ (millions) ?

ii) La direction de la gestion financière de la même entreprise a envie de changer la modélisation du budget pour l'année 2008 en définissant une nouvelle variable, transformée de X :

$$G(X) = \exp(X)$$

Trouver le support, la fonction de densité de la nouvelle variable aléatoire G qui représente le budget, ainsi que sa fonction de répartition (en termes d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite).

4 Tables

Variable aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

5 Table B_1

[3] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

6 Table B_2

[4] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 0.2
Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2

[3]Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

[4]Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.09000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.53590
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.57530
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.61410
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.65170
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.68790
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.72240
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.75490
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.78520
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.81330
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.83890
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.86610
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.88300
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.90147
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.91774
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.93189
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.94408
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.95449
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.96327
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.97062
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.97670
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.98169
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.98574
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.98899
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.99157
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.99361
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.99520
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.99642
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.99736
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.99807
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.99860
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.99899

1

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.14
le 3 juin 2009

1

Monsieur le Prince a la mémoire qui flanche. Installé dans sa résidence de Fontainebleau il ne se souvient plus très bien de la chronologie de ses sept voyages. Quand il entame le récit de ses exploits, il commence toujours par le premier voyage et quand il atteint le septième, il achève son récit. Les étapes intermédiaires sont aléatoires :

A la fin du premier, il passe soit au second avec une probabilité de $0,8$, soit au cinquième ; quand le deuxième se termine, il enchaîne soit avec le troisième avec une probabilité de $0,6$, soit avec le cinquième avec une probabilité de $0,3$, soit avec le septième ; il passe du troisième au quatrième avec une probabilité de $0,9$ sinon au sixième ; il passe du quatrième au cinquième une fois sur deux sinon au sixième ; il répète le cinquième une fois sur trois, sinon il passe au sixième ; il passe du sixième au premier avec une probabilité de $0,2$, sinon il continue avec le septième.

a) S'agît-il d'une chaîne de Markov ? Représenter le diagramme de transition, déterminer la matrice de transition et les classes d'équivalence de cette chaîne de Markov. Y-a-t-il des états absorbants ?

b) Soit X_n le numéro du voyage du n^{me} récit. Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires X_1 et X_2. Calculer leurs espérances.
Déterminer la probabilité pour que son Altesse raconte tous ses voyages dans le bon ordre.

2

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle. Donner la définition générale de la fonction de densité, calculer la fonction génératrice , la fonction caractéristique, la fonction de répartition la moyenne et la variance de X.

ii) Toto est souvent en retard en moyenne de 15 minutes au cours de l'Analyse Numérique.
Soit T la variable aléatoire qui représente le temps de retard de Toto à son cours.
a) Exprimer la fonction de densité et la fonction de répartition de T.
b) Quelle est l'expression de la fonction de fiabilité des arrivées de Toto à l'EISTI ?
c) Sachant que le cours de l'Analyse Numérique a déjà commencé depuis 10 minutes, calculer la probabilité pour que Toto n'arrive qu' après les 8 minutes suivants.

iii)
Un navigateur solitaire traverse l'Atlantique à la rame dans une baignoire. Le temps T qu'il passe dans sa baignoire avant la première rencontre avec un pétrolier panaméen suit une loi de probabilité continue de moyenne 2 semaines. Trouver la fonction de répartition de T .
Sachant que notre navigateur a déjà ramé une semaine dans la solitude, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X (donc donner la fonction de répartition de X) qui représente le temps qu'il doit encore attendre avant de croiser un pétrolier panaméen.

3

– 1.
Dans une grande commune on suppose que le pourcentage moyen de myopes est de $0,01$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de myopes dans un échantillon de 200 personnes choisies au hasard.

a) En formalisant le problème d'après une variable aléatoire discrète, calculer la probabilité pour qu'il y ait moins de quatre myopes dans l'échantillon.

b) Une formalisation d'après une autre variable aléatoire discrète (approximation de la précédente) serait - elle possible ? Si oui, calculer de nouveau la probabilité demandée en a) et comparer vos deux résultats (si possible...).

c) Obtenir la moyenne et la variance de X d'après la loi de b). Donner la fonction de répartition correspondante.

d) Quelle serait cette probabilité si vous aviez modélisé le problème par une loi continue approximation des deux lois discrètes précédentes ?

– 2.
Le petit éléphant champion du cirque de Moscou fait des tours de piste formidables sur ses patins à roulettes avec probabilité $0,20$ de tomber. Quel devrait être le nombre total minimal de tours de ce champion patineur pour que la probabilité de faire “au moins 1 chute” serait supérieure à $0,90$?

4

Dans le cadre d'une enquête hospitalière on suppose connaître pour chaque sujet la cause de son décès :
– 1) décès lié au cancer des bronches,
– 2) décès lié à toute autre cause (accident, autre maladie, etc,...)
Pour les sujets de la première catégorie, on admet que la distribution du délai de survie X (exprimé en mois) suit une loi Lognormale d' espérance μ_X et de variance σ_X^2, c'est à dire que l'on peut trouver des constantes $a,\ x_0,\ b$, telles que la variable :

$$Y = a\ln(X - x_0) + b$$

suive une loi normale d'espérance μ_Y et de variance σ_Y^2.

a) Calculer μ_X en fonction de $a,\ x_0,\ b,\ \mu_Y,\ \sigma_Y$.

b) Pour étudier la moyenne des délais de survie sur un groupe de n sujets, revient -il au même de considérer les variables $\overline{X}$ Ü et $\overline{Y}$?

c) On admet maintenant que la transformation $Y = \ln X$ est telle que Y suit la loi $\mathcal{N}(1,8;\ 1)$.
Avant la fin de l'enquête on désire étudier le délai moyen de survie observé sur les 16 premiers sujets, tous décédés.
Quelle est la probabilité pour que $\overline{Y} > 2,8$?

7 Tables

Variable aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

8 Table B_1

[5] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

9 Table B_2

[6] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 0.3
Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2

[5] Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

[6] Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.09000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.53590
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.57530
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.61410
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.65170
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.68790
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.72240
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.75490
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.78520
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.81330
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.83890
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.86610
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.88300
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.90147
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.91774
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.93189
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.94408
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.95449
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.96327
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.97062
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.97670
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.98169
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.98574
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.98899
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.99157
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.99361
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.99520
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.99642
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.99736
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.99807
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.99860
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.99899