

**E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**  
**1re Année Ingénieurs**  
**PROBABILITES I**  
**Devoir surveillé n° 1, donné le 21 janvier 2011**  
 (Durée 2h.)  
 (Aucun document ni calculatrice sont autorisés.)

**I (5 Pts.)**

Une salle de spectacle propose pour cette saison 2010-11, des abonnements à 4, 5 ou 6 spectacles. Dans la population des abonnés la répartition est la suivante :

- 45% ont choisi l'abonnement à 4 spectacles ;
- 30% ont choisi l'abonnement à 5 spectacles ;
- le reste a choisi l'abonnement à 6 spectacles.

D'autre part, 65% des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :

- 40% ont choisi l'abonnement à 4 spectacles ;
- 40% ont choisi l'abonnement à 5 spectacles ;
- le reste a choisi l'abonnement à 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard.

On note  $A$  l'événement : "l'abonné interrogé a moins de 25 ans".

On note  $B_k$  l'événement : " l'abonné interrogé a choisi l'abonnement à  $k$  spectacles ",  $k = 4, 5$  ou  $6$ .

- a) Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement à 5 spectacles ?
- b) Décrire l'événement  $A \cap B_5$  et calculer sa probabilité.
- c) Calculer la probabilité pour que l'abonnement choisi soit celui à 5 spectacles sachant que l'abonné a 25 ans ou plus.

**II (5 Pts.)**

Sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  on définit une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui suit une loi continue. On associe à  $X$  la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \frac{c}{x^2 + 1}$$

où  $c$  est un paramètre inconnu.

- 1) Pour quelle valeur de  $c$   $f$  est une **bonne fonction de densité de probabilité** ?
- 2) Etablir la fonction de répartition de  $X$ .
- 3) Calculer la probabilité pour que :

$$X \in \left\{ \left[ -1, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \cup \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right] \right\}$$

(Donnée :  $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ )

**III** (5 Pts.)

Dans une démarche marketing, un agent doit chercher à entrer en communication téléphonique avec  $n$  personnes présélectionnées dans une liste. On admet que la probabilité de joindre une personne donnée sur la liste est de 0, 1.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui représente le nombre de personnes répondant aux  $n$  appels.

- ✓ Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?
  - ✓ Si l'agent téléphone à 10 personnes, quelle est la probabilité pour qu'au moins une personne réponde à son appel ?
  - ✗ Combien d'appels faut-il donner pour qu'en **moyenne** 20 personnes répondent ? Dans ce cas, peut-on approcher la loi de  $X$  par une autre loi discrète ?
- Calculer alors la probabilité pour que 10 personnes répondent aux appels.

**IV** (5 Pts.)

Après observation de très nombreux relevés, on estime que la consommation électrique d'un abonné EDF en heure de pointe est bien représentée par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi Normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\mu = 5kW$  et  $\sigma = 1,5 kW$ .

- i) Calculer la probabilité pour que la consommation d'un abonné soit comprise entre  $4kW$  et  $6kW$ .
- ii) Un secteur comporte 100 abonnés dont les consommations en heure de pointe sont des variables aléatoires  $X_i$  supposées **indépendantes** et toutes de même loi  $\mathcal{N}(\mu = 5, \sigma^2 = (1,5)^2)$ .

On peut montrer que la variable aléatoire  $Y = \sum X_i$  qui représente la consommation totale du secteur en heure de pointe suit une loi Normale  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  de paramètres :

Espérance :  $\mu_Y = 500kW$  et écart-type  $\sigma_Y = 15kW$ .

- Calculer la puissance minimale que EDF doit fournir au secteur en heure de pointe pour satisfaire la demande avec une probabilité supérieure ou égale 0,99
- Suite à des intempéries EDF ne peut fournir toute la puissance nécessaire. Calculer la puissance minimale à fournir pour satisfaire 25% de la demande.

**1 Tables**

Variable Aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0, 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

**2 Table  $B_1$** 

<sup>1</sup> Table  $B_1$  donne la valeur de  $x$  dont la valeur correspondante de  $\mathcal{F}(x)$  est la somme de la colonne et ligne correspondante.

Percentile de la var. normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

**3 Table  $B_2$** 

<sup>2</sup> Table  $B_2$  donne  $\mathcal{F}(x)$ , o  $x$  est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

**Exemple 3.1**

Pour la valeur 0.36 on a  $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$  (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table  $B_2$ )

<sup>1</sup> Source R.A. Fisher and F. Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

<sup>2</sup> Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999