DS Probabilités - Rattrapage 02-2013

Titre de la note 19/02/2013

I 1. Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant a\}$ et $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} ; |x| < a\}$

$$E(|X|) = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x)\,dx = \int_A |x| f(x)\,dx + \int_{\bar{A}} \underbrace{|x| f(x)}_{\geqslant 0}\,dx$$

$$\Rightarrow E(|X|) \geqslant \int_A \underbrace{|x|}_{\geqslant a} f(x)\,dx \geqslant a \int_A f(x)\,dx = a \cdot \underbrace{P(X \in A)}_{P(|X| \geqslant a)}$$

$$\Rightarrow P(|X| \geqslant a) \leq \frac{1}{a} E(|X|)$$

2. $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

a) $E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x)\, dx$

Si n est impair, la fonction $x^n f_X(x)$ est impaire

$\Rightarrow \underline{E(X^n) = 0}$

Si $n = 2p$, $E(X^{2p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-1}\, x\, f_X(x)\, dx$

$$E(X^{2p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-1}\, x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \underbrace{\left[-x^{2p-1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0}$$

intégration par parties

$$+ \frac{2p-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-2} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$\Rightarrow E(X^{2p}) = (2p-1)\, E(X^{2p-2})$$

$$= (2p-1)(2p-3)\, E(X^{2p-4})$$

$$= \dots = (2p-1)(2p-3) \cdots 3\, \underbrace{E(X^0)}_{E(1)=1}$$

$$\Rightarrow E(X^{2p}) = (2p-1)(2p-3) \dots 3 . 1$$

$$= \frac{(2p)!}{2p\,(2p-2)\,(2p-4) \dots 2} = \boxed{\frac{(2p)!}{2^p\, p!} = E(X^{2p})}$$

b) $|X|^k \geqslant n \iff X^{2k} \geqslant n^2$

$$\Rightarrow P(|X|^k \geqslant n) = P(X^{2k} \geqslant n^2)$$

D'après 1. $P(X^{2k} \geq n^2) \leq \frac{1}{n^2} E(X^{2k})$

car $X^{2k} = |X^{2k}|$

$\Rightarrow \sqrt{n}\, P(|X|^k \geq n) \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} E(X^{2k}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, P(|X|^k \geq n) = 0}$

3. Y suit $\mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff X = \frac{Y - m}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0,1)$

$E(Y) = m \qquad \sigma^2 = E(Y^2) - m^2 \Rightarrow E(Y^2) = m^2 + \sigma^2$

$P(Y < 10) = P\left(X < \frac{10-m}{\sigma}\right) = 0,5 \Rightarrow \frac{10-m}{\sigma} = 0 \Rightarrow \boxed{m = 10}$

$P(Y > 11) = 0,16 \iff P(Y \leq 11) = P\left(X \leq \frac{11 - m}{\sigma}\right) = 0,84$

Tables $\Rightarrow \frac{11-m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \simeq 1 \quad \Rightarrow \boxed{\sigma \simeq 1}$

$\Rightarrow \boxed{E(Y) = 10 \qquad E(Y^2) = 101}$

II X suit $Exp(\theta, \nu)$

a) X = temps de fonctionnement sans panne à partir de l'instant ν

$\frac{1}{\theta}$ = durée de vie moyenne (càd sans panne)

b) Support $C_X =]\nu, +\infty[$

densité :

$$f(x) = \begin{cases} \theta\, e^{-\theta(x-\nu)} & \text{si } x \in C_X \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

c) $E(X) = \nu + \dfrac{1}{\theta} = \mu$; $V(X) = \dfrac{1}{\theta^2} = \sigma^2$

d) $F_X(x) = 0$ si $x < \nu$

Si $x > \nu$ $F_X(x) = \displaystyle\int_\nu^x \theta\, e^{\theta\nu - \theta t}\, dt$

$$= e^{\theta\nu}\left[-e^{-\theta t}\right]_\nu^x = 1 - e^{-\theta(x-\nu)}$$

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta(x-\nu)} & (x > \nu) \\ 0 & (x < \nu) \end{cases}}$$

ii) a) $P(T > t) = \phi(t) = e^{-0{,}2t} \Rightarrow \theta = 0{,}2$

$\nu = 2$

$$\Rightarrow \boxed{f_T(t) = \begin{cases} 0{,}2\ e^{-0{,}2(t-2)} & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}}$$

b) $$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}2(t-2)} & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

$$E(T) = \frac{1}{0{,}2} + 2 = \boxed{7 = \mu}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{(0{,}2)^2} = \frac{1}{(2 \cdot 10^{-1})^2} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-2}} = \frac{100}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma^2 = 25}$$

c) $F_T(t) = 1 - \phi(t-2)$

iii) i) T = temps de retard du train

variable aléatoire continue $\qquad C_T =]0, +\infty[$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\,dt = \int_0^{+\infty} 0,1 .\, e^{-0,1.t}\,dt = \left[-e^{-0,1t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$\Rightarrow f_T$ fonction de densité

$$E(T) = \int_0^{+\infty} 0,1.t\, e^{-0,1t}\,dt = \underbrace{\left[-t\, e^{-0,1t}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-0,1t}\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{E(T) = \frac{1}{0{,}1} = 10 \text{ mn}}$$

$\Rightarrow f_T$ est une bonne fonction de densité pour T

ii) $$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}1\, t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

continue croissante $\lim_{t \to -\infty} F_T(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F_T(t) = 1$

iii) $$P(T \geqslant 13 \mid T > 8) = \frac{P(T \geqslant 13)}{P(T > 8)} = \frac{1 - F_T(13)}{1 - F_T(8)} = \frac{e^{-0{,}1 \times 13}}{e^{-0{,}1 \times 8}}$$

$$= e^{-0{,}1 \times 5} = e^{-0{,}5} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

III a) Soit X la somme gagnée

le jeu est équitable si $E(X) = 0$

X prend les valeurs 1 et -1

$$P(X=1) = \frac{1}{2} = P(X=-1)$$

$$\Rightarrow E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \text{le jeu est équitable}$$

b) P(gagner 2 euros) = P(nombre de piles = nombre de faces + 2)

Y = nombre de fois pile

Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ nombre de fois face $= 10 - Y$

$$\Rightarrow P(\text{gagner 2 euros}) = P(Y = 10 - Y + 2) = P(2Y = 12) = P(Y=6)$$

$$= C_{10}^{6} \frac{1}{2^6} \frac{1}{2^{10-6}}$$

$$\boxed{P(\text{ gagner 2 euros}) = \frac{1}{2^{10}} C_{10}^{6}}$$

IV

$P(R_1) = 0,5$ $\quad$ $P(R_2) = 0,4$ $\quad$ $P(R_3) = 0,1$

A = on retrouve l'avion

$P(A | R_1) = 0,8$ $\quad$ $P(A | R_2) = 0,9$ $\quad$ $P(A | R_3) = 0,5$

1) $$P(A) = P(R_1) . P(A | R_1) + P(R_2) . P(A | R_2) + P(R_3) . P(A | R_3)$$
$$= 0,5 \times 0,8 + 0,4 \times 0,9 + 0,1 \times 0,5$$
$$= 0,4 + 0,36 + 0,05 = 0,45 + 0,36 = \boxed{0,81}$$

2) $$P(R_1 | A) = \frac{P(A \cap R_1)}{P(A)} = \frac{P(R_1) . P(A | R_1)}{P(A)} = \frac{0,4}{0,81} \approx \boxed{0,5}$$