

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1^{re} Année Ingénieurs
PROBABILITES I
Devoir surveillé n° 1
donné le 16 janvier 2014
 (Durée 2h.)

(Tout document, calculatrices et téléphones sont interdits)

I (5 Pts.) Le sang humain est classé en 4 groupes distincts : A, B, AB et O. Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (Rh+), sinon il est dit de Rhésus négatif (Rh-).

Sur une population P les groupes sanguins se répartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe, la population d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit d'après le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang de groupe O et Rhésus négatif est appelé un *donneur universel*.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un *donneur universel* ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de Rhésus négatif ?
3. Si un individu a un Rhésus négatif, quelle est la probabilité pour qu'il soit *donneur universel* ? Quelle est la probabilité qu'il soit du groupe A ?

II (4 Pts.)

A et B sont deux types d'avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne.

Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne.

Quel avion choisissez-vous ? (On discutera en fonction de p).

$20 \rightarrow 2$
 $1 \rightarrow 2$
 $1 \rightarrow 2$

III (11 Pts.)

1. (4 Pts.)

Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Déterminer la constante k .
- b) Calculer la fonction de répartition.
- c) La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit de 10^{-3} ?
- d) Quelle est la demande hebdomadaire moyenne ? Avec quel écart-type ?

2. (3 Pts.)

La consommation mensuelle d'essence en litre d'un client est une variable aléatoire normale d'espérance 50 l et d'écart-type 10 l.

- a) Quelle est la probabilité qu'un client consomme moins de 30 l ?
- b) Quelle est la probabilité qu'un client consomme entre 30 l et 50 l ?
- c) Combien de litres au maximum consomme 1/3 des consommateurs ?

3. (4 Pts.)

i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.

- a) Déterminer son support, et sa fonction de densité
- b) Montrer l'expression générale de sa fonction de répartition et sa relation avec la fonction de fiabilité.

ii) Le vendeur de Darty a assuré Tante Ninette que sa machine à laver peut ne pas tomber en panne avant 6 ans avec une probabilité de 0,3.

- a) Trouver la fonction de densité de la variable aléatoire X qui représente le temps du fonctionnement de cette machine avant sa première panne.
- b) Sachant que la machine n'a pas eu de problème pendant 2 ans quelle est la probabilité qu'elle puisse fonctionner encore 6 ans de plus sans problème ?

(Donnée : $\ln(0,3) = -1,2$)

1 Tables

Variable Aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0, 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

2 Table B_1

¹ Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante.

Percentile de la var. normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

3 Table B_2

² Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 3.1

Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2)

1. Source R.A. Fisher and F. Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh); avec la permission des auteurs et éditeurs.

2. Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936990	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999