DIPORTI Lisa ING1 09/02/2007

D

18,5/20

Examen de probabilité.

I- 1^{er} tiroir → 5 MAC, 4 PC $P[1] = 0,3$

2^{e} tiroir → 9 MAC, 3 PC $P[2] = 0,5$

3^{e} tiroir → 3 MAC, 7 PC $P[3] = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$.

a- on prend 2 disquettes dans le tiroir

$$\text{card}\,\Omega = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\,7!} = \frac{7! \times 8 \times 9}{2 \times 7!} = 4 \times 9 = 36.$$

$X_1 = \{$"on prend 2 disquettes MAC"$\}$.

$$\text{card}(X_1) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{3! \times 4 \times 5}{2 \times 3!} = 10.$$

$$P[X_1] = \frac{card(X_1)}{card(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$ 1

$X_2 = \{$' prendre 2 disquetts différentes '$\}$

$$card(X_2) = \binom{5}{1}\binom{4}{1} = \frac{5!}{1!\,4!} \times \frac{4!}{1!\,\ldots}$$

$$= \frac{3! \times 4 \times 5}{4!} \times \frac{4!}{3!}$$

$$= 20.$$

$$P[X_2] = \frac{card(X_2)}{card(\Omega)} = \frac{20}{36} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$ 1

b- on ouvre un tiroir au hasard et on prend 2 disquettes.

$T_1 = \{$' ouvrir le 1er tiroir '$\}$

$P[T_1] = 0{,}3$

$T_2 = \{$' ouvrir le 2e tiroir '$\}$

$P[T_1] = 0.5$

$T_3 = \{$' ouvrir le 3e tiroir '$\}$.

$P[T_3] = 1 - 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2.$

$B = \{$' prendre 2 disquettes différentes '$\}$.

$$P[B] = P[T_1] \times \frac{\binom{5}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} + P[T_2] \frac{\binom{9}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{2}} + P[T_3] \frac{\binom{3}{1} \times \binom{7}{1}}{\binom{10}{2}}$$ 3

$$= \frac{3}{10} \times \frac{\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}}{\frac{9!}{2!\,7!}} + \frac{1}{2} \times \frac{\frac{9!}{8!} \times \frac{3!}{2!}}{\frac{12!}{2!\,10!}} + \frac{2}{10} \times \frac{\frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{6!}}{\frac{10!}{2!\,8!}}$$

c- cf copie n°3.

II-

a-) on lance 2 dés équilibrés. on observe la somme des résultats sur les dés.

l'espace de probabilité est:

$\Omega = \{ (i,j) \, , 1 \leq i \leq 6 \, , 1 \leq j \leq 6 \}$.

$Card\, \Omega = 6^2$

1

b-) X la variable aléatoire qui représente la somme des résultats sur les 2 dés.

le support de cette variable aléatoire est:

$D_X = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$.

$(\Omega, \mathbb{R}, P) \xrightarrow{X} (D_X, \mathbb{R}, P_X)$.

déterminons la fonction de masse de X:

$P_X(\{2\}) = P(X^{-1}\{2\}) = P(1,1) = \frac{1}{36}$.

$P_X(\{3\}) = P(X^{-1}\{3\}) = P((1,2),(2,1)) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

$P_X(\{4\}) = P(X^{-1}\{4\}) = P[(1,3),(3,1),(2,2)] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3

$P_X(\{5\}) = P(X^{-1}\{5\}) = P[(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

$P_X(\{6\}) = P[X^{-1}\{6\}] = P[(2,4),(4,2),(1,5),(5,1),(3,3)] = \frac{5}{36}$

$P_X(\{7\}) = P[X^{-1}\{7\}] = P[(2,5),(5,2),(4,3),(3,4),(1,6),(6,1)]$

$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P_x[\{8\}] = P[(2,6),(6,2),(4,4),(5,3),(3,5)\}$

$= \frac{5}{36}$

$P_x[\{9\}] = P[(6,3),(3,6),(5,4),(4,5)]$

$= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P_x[\{10\}] = P[(6,4),(4,6),(5,5)\}$

$= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$P_x[\{11\}] = P[(6,5),(5,6)]$

$= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P_x[\{12\}] = P[(6,6)] = \frac{1}{36}$

on vérifie bien que

$$\sum_{i=2}^{12} P_x(\{i\}) = 1$$

on a bien une bonne variable aléatoire discrète.

$$P_x(x) = \begin{cases} 1/36 & \text{si } x = 2 \\ 1/18 & \text{si } x = 3 \\ 1/12 & \text{si } x = 4 \\ 1/9 & \text{si } x = 5 \\ 5/36 & \text{si } x = 6 \\ 1/6 & \text{si } x = 7 \\ 5/36 & \text{si } x = 8 \\ 1/9 & \text{si } x = 9 \\ 1/12 & \text{si } x = 10 \\ 1/18 & \text{si } x = 11 \end{cases}$$

DIFORTI Lisa ING1

c. Y la variable aléatoire qui représente le gain.
Le support de cette nouvelle variable est:
$$D_Y = \{10, -10, 0\}.$$

La fonction de masse de Y est la suivante:

$P_Y[10] = P[Y^{-1}\{10\}]$
$= P[(3,4),(4,3),(2,5),(5,2),(1,6),(6,1),(5,6),(6,5)]$
$= \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P_Y[-10] = P[Y^{-1}\{-10\}]$
$= P[(1,1),(6,6)]$
$= 2/36 = 1/18.$

$P_Y(0) = P[Y^{-1}\{0\}]$
$= \frac{13}{18}.$

2

donc on a:

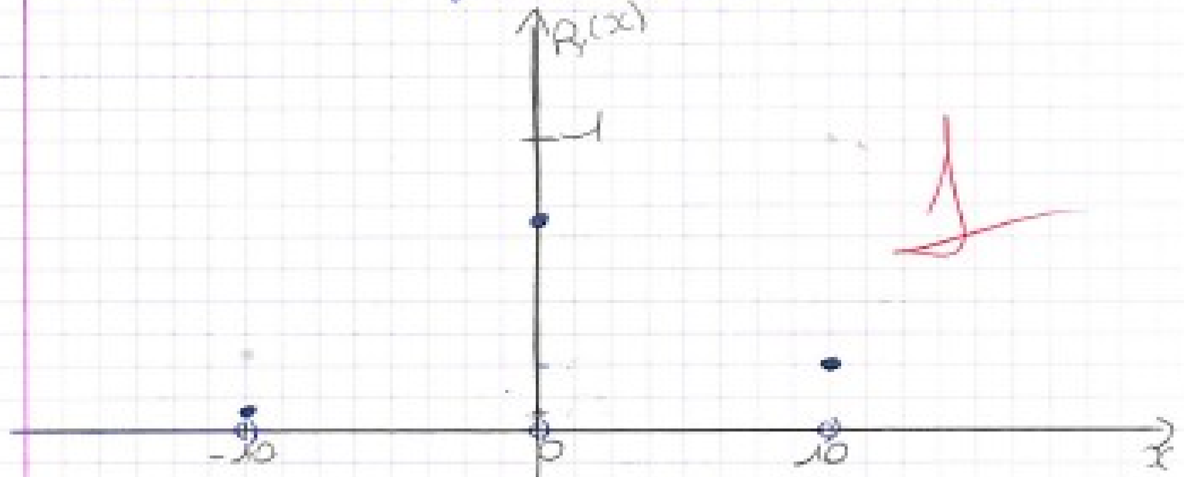
$$P_Y(x) = \begin{cases} 2/9 & \text{si } x = 10 \\ 1/18 & \text{si } x = -10. \\ 13/18 & \text{si } x = 0. \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

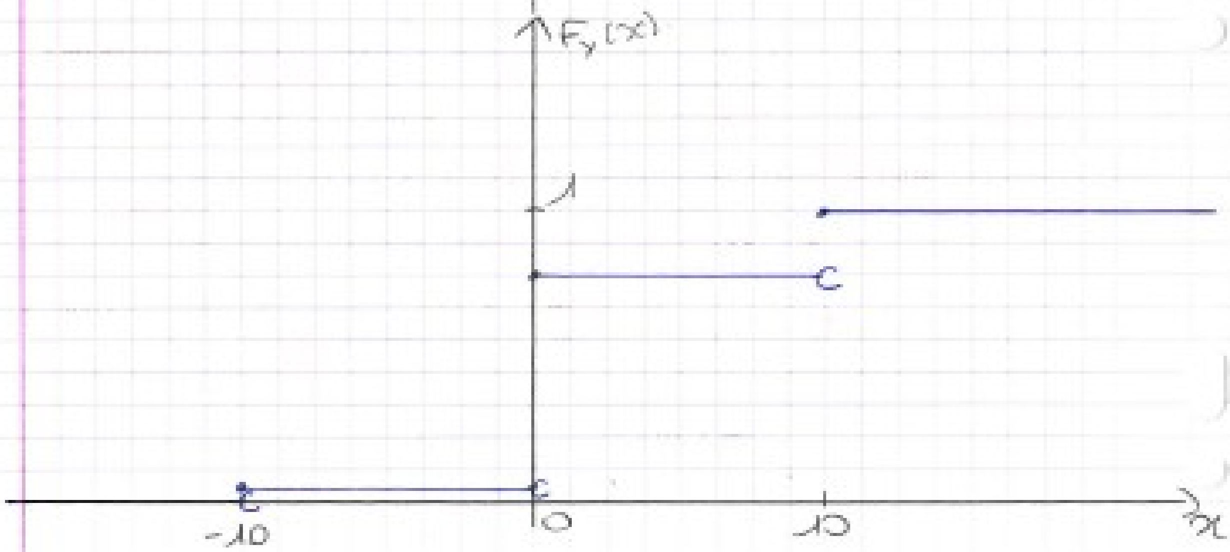
la fonction de répartition de Y est:

$$F_Y(x) = P[Y \leq x]$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -10 \\ 1/18 & \text{si } -10 \leq x < 0 \\ 14/18 & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } 10 \leq x \end{cases}$$

Les représentations graphiques sont les suivantes.





III

Ω

i) T la variable aléatoire qui représente le temps de retard du train.

Elle est continue et définit sur $[0, +\infty[$.

soit $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_T(t) = \begin{cases} (0,1)e^{-(0,1)t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

vérifions que c'est une bonne fonction de densité pour T.

- on a bien $f_T(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- f_T a un nombre fini de discontinuités (seule en 0)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (0,1)e^{-(0,1)t}dt$

$$= \int_0^{\infty} (0,1)e^{-(0,1)t}dt$$

$$= \frac{0,1}{0,1}\left[-e^{-(0,1)t}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{0,1}{0,1} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)dt = 1$$

1,5

on a donc bien une fonction de densité.

elle correspond bien au support proposé à savoir $[0, +\infty[$.
car elle est nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$.

ii) determinons la fonction de repartition de T.

$$F_T[x] = P[T \leq x]$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f_T(t)dt$$
$$= \int_{0}^{x} f_T(t)dt$$
$$= \int_{0}^{x} (0,1)e^{-(0,1)t}dt.$$
$$= \left[-e^{-(0,1)t}\right]_0^x$$
$$F_T[x] = 1 - e^{-(0,1)x}.$$

1,5

on a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} F_T(x) = 1$.

iii) $A_8 =$ {"le train a un retard de 8 min"}

$A_{13} =$ {"le train a un retard de 13 min"}

$A =$ {"le train a 8 min de retard et juliette doit encore attendre 5 minutes"}

2,5

$$P[A] = P[A_{13} \mid A_8]$$
$$= \frac{P[A_{13} \cap A_8]}{P[A_8]} = \frac{P[A_{13}]}{P[A_8]} = \frac{1-(1-e^{-1,3})}{1-(1-e^{-0,8})}$$
$$= \cancel{\frac{1-e^{-(0,1)\times 13}}{1-e^{-(0,1)\times 8}}}$$
$$= e^{-0,5}$$
$$P[A] = \cancel{\frac{1-e^{-1,3}}{1-e^{-0,8}}}$$

DIFORTI Lisa ING1

I) c. on ouvre 1 tiroir au hasard, on prend 1 disquette.

Π = {" la disquette est pour le Mac "}.

C = {" avoir ouvert le 1er tiroir sachant que la disquette est pour le Mac "}.

$P[C] = P[T_1 | \Pi] = \frac{P[T_1 \cap \Pi]}{P[\Pi]}$.

$P[T_1 \cap \Pi] = 0{,}3 \times \frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}}$

$= \frac{3}{10} \times \frac{\frac{5!}{4!}}{\frac{9!}{8!}}$

$= \frac{3}{10} \times \frac{5}{9}$

$= \frac{1}{6}$.

$P[\Pi] = P[\Pi \cap T_1] + P[\Pi \cap T_2] + P[\Pi \cap T_3]$.

$= \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{12} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$

$= \frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{3}{50}$

=

3,5