**E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**
**1re Année Ingénieurs**

PROBABILITES

**Devoir surveillé** $n^o$ 1 **donné le** 10 **juin** 2008
( Durée 2h.)

# I (5 *Pts.*)

i) Soit $X$ une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle. Donner la définition générale du support $C_X$, et de la fonction de densité $f_X$.
Calculer la fonction de répartition $F_X(x)$, la fonction génératrice $M_X(t)$, et la moyenne, de $X$.
Donner l'expression de la fonction de fiabilité $\phi_X(x_0)$ en termes de la fonction de répartition.

ii) Un des grands tableaux lumineux de l'annonce des départs du TGV Paris-Gare Montparnasse a des pannes fréquentes.
Soit $T$ la variable aléatoire qui représente le temps qu'on peut espérer disposer avant une panne de ce tableau. Si on a estimé que la fiabilité du bon fonctionnement du tableau lumineux jusqu' au temps $t_0$ est de la forme :

$$\phi_T(t_0) = \exp\{-0,2t_0\}.$$

a) Déterminer la fonction de densité, la fonction de répartition et la moyenne de $T$.

b) Sachant que le tableau a déjà fonctionné 4 jours sans panne, utiliser 2 méthodes différentes pour évaluer la probabilité qu'une panne arrive 6 jours plus tard.

# II (5 *Pts.*)

i) La quantité annuelle (en cm) de précipitations de neige dans une région, est modélisée d'après une variable aléatoire normale $X : \mathcal{N}(\mu = 140; \sigma^2 = 16)$

a) Quelle est la probabilité pour que la quantité de précipitations soit comprise entre 138 et 144 cm ?

b) Déterminer la quantité de précipitations $q$ pour que :

$$P[\{X > q\}] = 0,2$$

ii) Avec le déréglement climatique, les scientifiques prévoient que la quantité de précipitations dans dix ans sera distribuée selon une nouvelle variable aléatoire définie par :

$$Y = \exp(X - 136)$$

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X - 136$ ?

b. En déduire la loi de $Y$. Trouver le support, la fonction de densité de la nouvelle variable aléatoire $Y$, ainsi que sa fonction de répartition (en termes de la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite).

c. Quelle et la probabilité pour que la quantité de précipitations $Y$ soit comprise entre 130 et 150 cm ?

## III (5 *Pts.*)

Des études statistiques sur la couleur des fleurs de marroniers en Europe ont montré qu'il y a une probabilité de $0,10$ de trouver des marroniers aux fleurs rouges.

Soit $X$ la variable aléatoire qui modélise le nombre de marroniers rouges dans un échantillon de $n$ marroniers de couleurs différentes.

i) Pour la formalisation mathématique de $X$ choisir une variable aléatoire discrète (que vous considérez la mieux appropriée).

Donner son support et sa fonction de masse.

Ecrire, sans faire de calculs précis, les equations qui donneraient des réponses aux questions suivantes :

a.) Quelle est le nombre moyen de marroniers aux fleurs rouges dans un échantillon de 900 marroniers ?

b.) Quelle est la probabilité que dans le même échantillon on trouve un nombre de marroniers rouges supérieur à 72 ?

ii) Répondre aux mêmes questions a.) et b.) ci-dessus en approximant la variable aléatoire précédente, par une autre variable aléatoire discrète.

iii) Répondre à la question b.) **précisemment** en utilisant une variable aléatoire <u>continue</u> approximation de celle du i)

## IV (5 *Pts.*)

Un avion est porté disparu. On sait qu'il se trouve dans une zone constituée de trois régions : **1**, **2**, **3**.

Ces régions sont très différentes pour diverses raisons (géographie , végétations ....)

La probabilité que l'avion soit tombé dans la région **1** est de $0.5$ alors que la probabilité pour la région **2** est de $0,4$.

Si l'avion est tombé dans la région **1**, il y a $0,80$ de chances de le retrouver. Si il est tombé dans la région **2** il y a $0,90$ de chances pour le retrouver alors qu'il n'y a que $0.50$ de chances de retrouver l'avion diparu dans la région **3**.

1. Calculer la probabilité de retrouver l'avion disparu .
2. On a retrouvé l'avion.
   Quelle est la probabilité qu' il soit tombé dans la région **1** ?

# 1 Tables

Variable aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

# 2 Table $B_1$

[1] Table $B_1$ donne la valeur de $x$ dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrée réduite.

| F | .000 | .010 | .020 | .030 | .040 | .050 | .060 | .070 | .080 | .090 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .5 | .000 | .025 | .050 | .075 | .100 | .126 | .151 | .176 | .202 | .228 |
| .6 | .253 | .279 | .305 | .332 | .358 | .385 | .412 | .440 | .468 | .496 |
| .7 | .524 | .553 | .583 | .613 | .643 | .674 | .706 | .739 | .772 | .806 |
| .8 | .842 | .878 | .915 | .954 | .994 | 1.036 | 1.080 | 1.126 | 1.175 | 1.227 |
| .9 | 1.282 | 1.341 | 1.405 | 1.476 | 1.555 | 1.645 | 1.751 | 1.881 | 2.054 | 2.326 |

| x | 1.960 | 2.576 | 3.090 | 3.291 | 3.891 | 4.417 | 4.892 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | .975 | .995 | .999 | .9995 | .99995 | .999995 | .9999995 |
| 2(1-F) | .050 | .010 | .002 | .001 | .0001 | .00001 | .000001 |

# 3 Table $B_2$

[2] Table $B_2$ donne $\mathcal{F}(x)$, où $x$ est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

**Exemple 3.1**

Pour la valeur $0.36$ on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table $B_2$

[1]Source R.A. Fisher and F.Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

[2]Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

| x | .000000 | .010000 | .020000 | .030000 | .040000 | .050000 | .060000 | .070000 | .080000 | .090000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | .500000 | .504000 | .508000 | .512000 | .516000 | .519900 | .523900 | .527900 | .531900 | .535900 |
| .1 | .539800 | .543800 | .547800 | .551700 | .555700 | .559600 | .563600 | .567500 | .571400 | .575300 |
| .2 | .579300 | .583200 | .587100 | .591000 | .594800 | .598700 | .602600 | .606400 | .610300 | .614100 |
| .3 | .617900 | .621700 | .625500 | .629300 | .633100 | .636800 | .640600 | .644300 | .648000 | .651700 |
| .4 | .655400 | .659100 | .662800 | .666400 | .670000 | .673600 | .677200 | .680800 | .684400 | .687900 |
| .5 | .691500 | .695000 | .698500 | .701900 | .705400 | .708800 | .712300 | .715700 | .719000 | .722400 |
| .6 | .725700 | .729100 | .732400 | .735700 | .738900 | .742200 | .745400 | .748600 | .751700 | .754900 |
| .7 | .758000 | .761100 | .764200 | .767300 | .770300 | .773400 | .776400 | .779400 | .782300 | .785200 |
| .8 | .788100 | .791000 | .793900 | .796700 | .799500 | .802300 | .805100 | .807800 | .810600 | .813300 |
| .9 | .815900 | .818600 | .821200 | .823800 | .826400 | .828900 | .831500 | .834000 | .836500 | .838900 |
| 1.0 | .841300 | .843800 | .846100 | .848500 | .850800 | .853100 | .855400 | .857700 | .859900 | .866100 |
| 1.1 | .864300 | .866500 | .868600 | .870800 | .872900 | .874900 | .877000 | .879000 | .881000 | .883000 |
| 1.2 | .884900 | .886900 | .888800 | .890700 | .892500 | .894400 | .896200 | .898000 | .899700 | .901470 |
| 1.3 | .903200 | .904900 | .906580 | .908240 | .909880 | .911490 | .913090 | .914660 | .916210 | .917740 |
| 1.4 | .919240 | .920730 | .922200 | .923640 | .925070 | .926470 | .927850 | .929220 | .930560 | .931890 |
| 1.5 | .933190 | .934480 | .935740 | .936690 | .938220 | .939430 | .940620 | .941790 | .942950 | .944080 |
| 1.6 | .945200 | .946300 | .947380 | .948450 | .949500 | .950530 | .951540 | .952540 | .953520 | .954490 |
| 1.7 | .955430 | .956370 | .957280 | .958180 | .959070 | .959940 | .960800 | .961640 | .962460 | .963270 |
| 1.8 | .964070 | .964850 | .965620 | .966380 | .967120 | .967840 | .968560 | .969260 | .969950 | .970620 |
| 1.9 | .971280 | .971930 | .972570 | .973200 | .973810 | .974410 | .975000 | .975580 | .976150 | .976700 |
| 2.0 | .977250 | .977780 | .978310 | .978820 | .979320 | .979820 | .980300 | .980770 | .981240 | .981690 |
| 2.1 | .982140 | .982570 | .983000 | .983410 | .983820 | .984220 | .984610 | .985000 | .985370 | .985740 |
| 2.2 | .986100 | .986450 | .986790 | .987130 | .987450 | .987780 | .988090 | .988400 | .988700 | .988990 |
| 2.3 | .989280 | .989560 | .989830 | .990097 | .990358 | .990613 | .990863 | .991106 | .991344 | .991576 |
| 2.4 | .991802 | .992024 | .992240 | .992451 | .992656 | .992857 | .993053 | .993244 | .993431 | .993613 |
| 2.5 | .993790 | .993963 | .994132 | .994297 | .994457 | .994614 | .994766 | .994915 | .995060 | .995201 |
| 2.6 | .995339 | .995473 | .995604 | .995731 | .995855 | .995975 | .996093 | .996207 | .996319 | .996427 |
| 2.7 | .996533 | .996636 | .996736 | .996833 | .996928 | .997020 | .997110 | .997197 | .997282 | .997365 |
| 2.8 | .997445 | .997523 | .997599 | .997673 | .997744 | .997814 | .997882 | .997948 | .998012 | .998074 |
| 2.9 | .998134 | .998193 | .998250 | .998305 | .998359 | .998411 | .998462 | .998511 | .998559 | .998605 |
| 3.0 | .998650 | .998694 | .998736 | .998777 | .998817 | .998856 | .998893 | .998930 | .998965 | .998999 |

**E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**
**1re Année Ingénieurs**

PROBABILITES

**Devoir surveillé $n^0$ 1 donné le 9 février 2007**
( Durée 1h.30m)

# I (8 *Pts.*)

La desserte de travail de Toto possède trois tiroirs contenant chacun des disquettes formatées pour un Mac et des disquettes formatées pour un PC qui sont indiscernables au toucher.

Dans le premier tiroir, il y a 5 disquettes pour le Macintosh et 4 disquettes pour le PC. Dans le deuxième tiroir, il y a 9 disquettes pour le Mac et 3 disquettes pour le PC. Dans le troisième tiroir, il y a 3 disquettes pour le Mac et 7 disquettes pour le PC.

Quand on ouvre un tiroir au hasard : La probabilité d'ouvrir le premier tiroir est égale à 0,3 alors que la probabilité d'ouvrir le deuxième tiroir est égale à 0,5.

a) On ouvre le premier tiroir et on prend deux disquettes au hasard dans ce tiroir. Calculer la probabilité de prendre deux disquettes pour Macintosh. Calculer la probabilité de prendre deux disquettes différentes.

b) On ouvre un tiroir au hasard et on prend deux disquettes au hasard dans ce tiroir. Calculer la probabilité de prendre deux disquettes différentes.

c) On ouvre un tiroir au hasard et on prend une disquette au hasard dans ce tiroir. Sachant que la disquette est pour le Mac, calculer la probabilité d'avoir ouvert le premier tiroir.

# II (7 *Pts.*)

Un joueur lance deux dés équilibrés et il observe la somme des résultats sur les dés. Le joueur est déclaré gagnant s'il obtient un 7 ou un 11 et perdant s'il obtient un 2 ou un 12. Tout autre résultat n'implique aucun jugement.

a) Déterminer l'espace de probabilité initial de l' expérience aléatoire du lancement des deux dés.

b) Soit $X$ la variable aléatoire qui représente le somme des résultats sur les 2 dés. Déterminer l'espace de probabilité induit par cette variable aléatoire $X$ son support et sa fonction de masse.

c) Soit $Y$ la variable aléatoire qui représente le gain du joueur. Si le joueur gagne ou perd 10 euros selon le cas, déterminer le support de cette nouvelle variable. Trouver la fonction de masse et la fonction de répartition de $Y$. Donner les représentations graphiques correspondantes.

# III (5 *Pts.*)

Juliette emprunte quotidiennement la ligne $A$ du RER (pour aller de la gare de Lyon à l' $E.I.S.T.I$) et elle est souvent en retard à cause des "problèmes techniques" du train.

Les responsables ont informé Juliette sur la fiabilité des horaires affichés, en lui affirmant qu'il faut qu'elle prévoit en moyenne 10 minutes de retard chaque fois qu'elle prend le RER $A$. Déterminer l'espace fondamental $\Omega$ de ce phénomène aléatoire.

i) Soit $T$ la variable aléatoire qui représente le temps de retard du train. Est-elle continue ou discrète ?

Pourriez- vous définir son support ?

Vérifier que la fonction suivante $f_T : R \longrightarrow \mathbb{R}$ est une bonne fonction de densité pour la variable aléatoire $T$, et qu' elle correspond bien au support que vous proposez.

$$f_T(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} (0,1)e^{-(0,1)t} & si & t > 0 \\ 0 & & ailleurs \end{array} \right\}$$

ii) Déterminer la fonction de répartition de $T$, et vérifier bien ses principales propriétés.

iii) Sachant que le train a déjà un retard de 8 minutes, déterminer la probabilité pour que Juliette attende encore 5 minutes de plus.