INTRODUCTION AUX PROBABILITES
VII

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2006-2007

Table des matières

Table des figures

Chapitre 7

Quelques lois de probabilités discrètes

1 Loi de Bernoulli

On considère l'expérience de Bernoulli où on a deux issues possibles, $s =$succès et $e =$échec, donc l'espace fondamental est : $\Omega = \{s,\ e\}$.

Définition 1.1 On pose :

$$P[\{s\}] = p \quad \text{avec } 0 < p < 1.$$

On introduit l'application :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{avec} \quad x(s) = 1 \quad \text{et} \quad x(e) = 0$$

On définit ainsi X *une variable aléatoire discrète qui suit une loi de Bernoulli avec paramètre* p

$$\Leftrightarrow \ X : B(p)$$

ayant comme support : $D_X = \{0,\ 1\}$ *et fonction de masse*

$$p_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \forall x \in D_X = \{0,\ 1\} \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Moyenne :

$$E[X] = p$$

Variance :

$$\sigma^2(X) = p(1-p)$$

2 Loi binomiale

On considère comme expérience aléatoire la répétition de n expériences indépendantes de Bernoulli.

Définition 2.1 On associe à cette expérience une variable aléatoire discrète X qui suit la loi binomiale avec paramètres $n \in \mathbb{N},\ p \in]0, 1[$:

$$\Leftrightarrow X : B(n,\ p)$$

ayant comme support :

$$D_X = \{0,\ \ldots,\ n\}$$

et comme fonction de masse :

$$p_X(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & \forall x \in D_X \\ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On vérifie facilement que p_X est une fonction de masse car $p_X(x) \geq 0\ \forall x$ et

$$\sum_{x=0}^{n} p_X(x) = (p + (1-p))^n = 1 :, \text{(Newton)}$$

$$\text{Espérance :} \qquad E(X) = np$$

$$\text{Variance :} \qquad \sigma^2(X) = np(1-p)$$

3 Loi de Poisson

1

Définition 3.1 X variable aléatoire discrète suit une loi de Poisson

$$\Leftrightarrow X : P[\lambda]$$

avec paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, si elle admet comme support :

$$D_X = \{0,\ 1,\ \ldots\}$$

et comme fonction de masse :

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \forall x \in D_X \\ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On vérifie que p_X est une bonne fonction de masse car : $p_X(x) \geq 0\ \forall x$ et $\displaystyle\sum_{x \in D_X} p_X(x) = 1$.

$$\text{Espérance :} \qquad E(X) = \lambda$$

$$\text{Variance :} \qquad \sigma^2(X) = \lambda$$

2 Application

Théorème 3.1 (loi de Poisson comme limite de la loi binomiale)
Soient $\{p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n\ \ldots\}$*, une suite de nombres appartenant à* $]0,\ 1[$ *tels que* $np_n = \lambda\ (\lambda \in]0,\ +\infty[)\ n = 1, 2, 3\ldots$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \lim_{n \to +\infty} C_n^x p_n^x q_n^{n-x}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\ \forall x \in \mathbb{N}$$

3 Complément sur la loi de Poisson

Conditions pour que X variable aléatoire avec support une partie de $\mathbb{N}$ se formalise d'après une loi de Poisson.

La variable aléatoire discrète qui donne le nombre d'apparitions d'un phénomène aléatoire dans un intervalle de temps T suit une loi de Poisson :

$$P_\lambda[x] = \frac{e^{-\theta T}(\theta T)^x}{x!} \text{ avec } \begin{cases} \lambda = \theta T \\ \theta = \dfrac{\text{nombre d'apparitions}}{\text{unité de temps}} \\ T = \text{temps, longueur, surface, volume} \end{cases}$$

si les conditions suivantes sont respectées :

C1 $\exists\, \theta > 0$ tel que la probabilité d'observer exactement une apparition du phénomène aléatoire, $P[\{x = 1\}]$, dans l'intervalle de temps $[t,\ t+h]$ est donnée par :

$$P[\{x = 1\}] = \theta h + \varphi(h)$$

avec φ tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$$

C2 Soient les intervalles indépendants : $I_1,\ \dots,\ I_n,\quad I_i \cap I_j = ,$ et soient les événements :
$A_j = \{$"au moins une apparition du phénomène aléatoire dans l'intervalle I_j"$\}$
$\Rightarrow$ Tous les événements A_j sont mutuellement indépendants :

$$P[A_i \cap A_j] = P[A_i]\, P[A_j]$$

4 Loi hypergéométrique

Expérience : Tirage simultané de n boules par une boite de N boules :

$$\text{avec} \begin{cases} N_1 & \text{boules blanches} \\ N_2 & \text{boules noires} \end{cases}$$

On associe à cette expérience une variable aléatoire X qui désigne le nombre de boules blanches parmi les n choisies.

La plus petite valeur :

$$x_{min} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq N_2 \\ n - (N - N_1) = n - N_2 & \text{si } n > N_2 \end{cases}$$

La plus grande valeur :

$$x_{max} = \left\{ \begin{array}{ll} N_1 & \text{si } n \geq N_1 \\ n & \text{si } n < N_1 \end{array} \right\}$$

Il existe $\begin{pmatrix} N_1 \\ x \end{pmatrix}$ façons de choisir x boules blanches et $\begin{pmatrix} N_2 \\ n-x \end{pmatrix}$ façons de choisir $(n-x)$ boules noires et le modèle est uniforme

Définition 4.1

X variable aléatoire discrète suit la loi hypergéométrique avec paramètres $N,\ N_1$ et n

$$\Leftrightarrow\ X : H(N,\ N_1,\ n)$$

si elle admet comme support :

$$D_X = \{\max(0,\ n - N + N_1),\ \max(0,\ n - N + N + 1) \ldots \min(n,\ N_1)\}$$

et fonction de masse

$$p_X(x) = \frac{\begin{pmatrix} N_1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N - N_1 \\ n - x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} = \frac{C_{N_1}^{x} C_{N-N_1}^{n-x}}{C_N^n} \qquad \forall x \in D_X$$

avec :

$$0 \leq N_1 \leq N; \qquad 1 \leq n \leq N.$$