INTRODUCTION AUX PROBABILITES
VI

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2006-2007

Table des matières

Table des figures

Chapitre 6

Fonctionnelle génératrice Fonction caractéristique

1 Fonctionnelle génératrice des moments : M_X

1

Définition 1.1
Si $E[e^{tX}]$ existe $\forall\ t \in]t_1,\ t_2[$ avec $0 \in]t_1,\ t_2[$, on définit l'application :

$$\begin{array}{rl} M_X :]t_1,\ t_2[& \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto M_X(t) = E[e^{tX}]; \\ \textit{avec},\ M_X(0) = 1. & \end{array}$$

M_X est appelée fonction (ou fonctionnelle) génératrice des moments de X.
$]t_1,\ t_2[$ de longueur maximale, est appelé : *intervalle de définition de M_X*.

2

Exemple 1.1 Exemple de fonction génératrice
Soit X variable aléatoire discrète avec support : $D_X = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
et fn. de masse :

$$p_X(x) \begin{cases} \dfrac{1}{5} & x \in D_X \\ 0 & x \notin D_X \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} E\left[e^{tX}\right] & = \sum e^{tX} p_X(x) \\ & = e^{-2t}p_X(-2) + e^{-t}p_X(-1) + p_X(0) + e^t p_X(1) + e^{2t}p_X(2) \\ & \dfrac{1}{5}\left(e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + e^{2t}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow M_X(t) \textit{ existe } \forall\ t \in \mathbb{R}$$

3

Remarque 1.1

Souvent on calcule les moments d'une variable aléatoire
à partir de $M_X(t)$ (en prenant ses dérivées) d'après le résultat suivant :

Théorème 1.1

Soit X variable aléatoire avec :

$$M_X(t) \text{ définie pour } t \in]t_1,\ t_2[\text{ et } t_1 < 0 < t_2$$

i) Tous les moments μ_K de X existent.
ii)

$$\forall\ t \in]-s,\ s[\text{ où}, \quad 0 < s < t_0 = \min]-t_1,\ t_2[,$$

$M_X(t)$ admet un développement en série entière :

$$M_X(t) = 1 + E[X]t + \frac{E[X^2]}{2!}t^2 + \dots$$

iii) $\forall\ k \in \mathbb{N}^*\ E\left[X^k\right] = M_X^{(k)}(0)$ *: dérivée n-ième de M_X au point $t = 0$*

Exemple 1.2

On avait (v. exemple précédent) : $M_X(t) = \dfrac{1}{5}\left(e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + e^{2t}\right)$
$M_X^{(k)}(0) = \dfrac{1+2^k}{5}\left((-1)^k + 1\right)$ k-ième moment de X

$$\Rightarrow E\left(X^k\right) = \begin{cases} 2\dfrac{(1+2^k)}{5} & \text{si } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

4

Théorème 1.2 (Unicité et propriétés)

Soit X et Y, deux variables aléatoires admettant les fonctions génératrices M_X, M_Y respectivement, avec : $t \in]t_1,\ t_2[$ et, $t_1 < 0 < t_2$.

$$\Rightarrow$$

i) Les variables X et Y suivent la même loi de probabilité si et seulement si :

$$\forall\ t \in]t_1,\ t_2[\quad M_X(t) = M_Y(t)$$

$$\Leftrightarrow \qquad X \text{ et } Y \text{ identiquement réparties.}$$

ii) La fonction génératrice vérifie toutes les propriétés de la fonction de Laplace (linéarité, convolution, théorème du retard etc.).

2 Fonction caractéristique Φ_X

Définition 2.1
Soit X une variable aléatoire. On définit l' application :

$$\begin{aligned} \Phi_X : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] \end{aligned}$$

appelée *fonction caractéristique de X.*

1 Cas continu

Définition 2.2
Fonction caractéristique $\Leftrightarrow$ Transformée de Fourier (complexe conjuguée) de la fonction de densité :

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} f_X(x)dx \Leftrightarrow E\left[e^{j\omega X}\right] = \Phi_X(\omega)$$

Théorème 2.1 La fonction caractéristique vérifie toutes les propriétés de la transformée de Fourier.

1. *La linéarité.*
2. *L'existence d'après Lebesgue :*
$$E\left[\left|e^{j\omega X}\right|\right] = 1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$
3. *Le théorème de Convolution :*
$$\Phi_{X*Y}(\omega) = \Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega)$$
4. *Fonction caractéristique d'une fonction linéaire :*
$$\Phi_{\lambda X}(\omega) = \Phi_X(\lambda\omega)$$
$$\Phi_{X+\alpha}(\omega) = e^{j\omega\alpha}\Phi_X(\omega)$$
5. *Dérivées à l'origine :* $\Phi_X^{(k)}(0) = \omega^k E\left[X^k\right]$

2 Cas discret

$$\Phi_X(\omega) = E\left[e^{j\omega X}\right] = \sum_{x_i \in D_X} e^{j\omega x_i} p_X(x_i)$$

Avec la fonction δ de Dirac on définit :

$$f_X(x) = \sum_{x_i} p_X(x_i)\delta(x - x_i)$$

alors on obtient que : $\Phi_X(\omega)$ est la *transformée de Fourier discrète* :

$$\begin{aligned} \Phi_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} \sum p_X(x_i)\delta(x - x_i)dx \\ &= \sum_i p_X(x_i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x}\delta(x - x_i)dx = \sum_i p_X(x_i)e^{j\omega x_i} \end{aligned}$$