INTRODUCTION AUX PROBABILITES
IV

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2006-2007

Table des matières

Table des figures

Chapitre 4

Espérance mathématique -Variance

1 Espérance ou moyenne $E[X]$

(autres notations) :

$$E[X] = \mu_X = m_X$$

1 Espérance Mathématique (Cas : Discret et Continu)

Définition 1.1
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathcal{P})$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$

a. *Espérance mathématique $E[X]$ d'une var. aléatoire discrète :*
Soit D_X le support et p_X la fonction de masse de X alors :

$$E[X] = \sum_{x \in D_X} x p_X$$

b. *Espérance mathématique $E[X]$ d'une var. aléatoire continue :*
Soit C_X le support et f_X la fonction de densité de X alors :

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Remarque 1.1

1. Souvent la valeur de l'espérance n' appartient pas au support de la variable aléatoire
2. Pour le cas discret, l'espérance est équivalente à la moyenne arithmétique des valeurs de X pondérées par leur probabilité
3. L'existence de $E[X]$ (ou μ_X) est équivalente à l'étude de la convergence absolue de la série ou de l'intégrale au sens de Lebesgue.
4. *Interprétation physique de la moyenne dans le cas discret :*
   On a pour exemples :
   a) le centre de gravité des corps matériels ;
   b) la distribution de probabilité en moyenne - pour les bactéries en biologie ;
   c) appels téléphoniques ou pannes dans la vie courante.

5. *Interprétation physique de la moyenne dans le cas continu :*
   - Moyenne de densité de probabilité de présence des particules, ou de densité de probabilité des niveaux d'énergie en mécanique quantique.
   - Temps moyen d'attente devant les guichets d'une banque , d'une poste etc.., temps moyen d'attente de fichiers dans une imprimante etc...
   - Temps moyen d'attente avant la première panne d'un appareil, etc...

2 Moments d'une variable

Définition 1.2 (Moment d'une variable aléatoire)
On définit : $\mu'_k = E[X^k]$ appelé $k^{ième}$ *moment de la variable aléatoire X par rapport à l'origine.*

Définition 1.3
On définit : $\mu_k = E[(X - \mu_X)^k]$ appelé $k^{ième}$ *moment de la variable aléatoire X par rapport à la moyenne μ_X.*

Remarque 1.2

1. *pour* $k = 1$ $\quad \mu'_1 = \mu_X = E[X]$
2. *pour* $k = 1$ $\quad \mu_1 = E[(X - \mu_X)] = \mu_X - \mu_X = 0$
3. $\mu_2 = E[(X - \mu_X)^2]$. *Interprétation physique : Moment d'inertie.*
4. *Si* $\forall x \in D_X$ *(ou si* $\forall x \in C_X$*)* $x = C$ *(constante réelle) alors :*

$$E[C] = \sum_{x \in D_X} x p_X(x) = \sum_{x \in D_X} C p_X(x) = C \sum_{x \in D_X} p_X(x) = C$$

ou,

$$E[C] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} C f_X(x) dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = C.$$

2 Variance

Définition 2.1 (Variance σ_X^2 et écart-type σ_X)
Soit X variable aléatoire. On appelle *variance de* X le moment :

$$\mu_2 = E[(X - \mu_X)^2] = var[X] = \sigma_X^2$$

Écart-type de X *:* $\sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X$

Remarque 2.1

1. μ_X (la moyenne ou espérance) est une mesure de localisation pour la var. aléatoire X.
2. σ_X^2 est une mesure de dispersion pour la var. aléatoire X.
3. $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \Leftrightarrow$ le support de la variable aléatoire X est plus dispersé que celui de Y (au sens de la loi de probabilité).

Théorème 2.1
Si X *variable aléatoire de variance* σ_X^2

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \mu_2' - \mu_X^2$$

ou

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = E[X^2] - E^2[X]$$

Théorème 2.2
Soit X *variable aléatoire de moyenne* μ_X *et de variance* σ_X^2.
Définissons la var. aléatoire $Y = aX + b \quad (a,\ b \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \mu_Y = a\mu_X + b \qquad \textit{et} \qquad \sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

(linéarité de l'espérance et non-linéarité de la variance)

Démonstration :

$$\mu_Y = E[Y] = E[aX + b] = E[aX] + E[b] = aE[X] + b = a\mu_X + b$$

et

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - E^2[Y] = E[a^2X^2 + b^2 + 2abX] - a^2\mu_X^2 - b^2 - 2ab\mu_X = a^2\sigma_X^2$$

Théorème 2.3
Soit X *variable aléatoire de moyenne* μ_X *et de variance* $\sigma_X^2 \neq 0$, *si*

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

$\Rightarrow$

$$\mu_Y = 0; \quad \sigma_Y^2 = 1$$

Y est appelée variable aléatoire centrée réduite.

Démonstration :

Par application du théorème précédent (avec $a = \dfrac{1}{\sigma_X}$ et $b = \dfrac{-\mu_X}{\sigma_X}$) on écrit :

$$E[Y] = E[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}] = \frac{1}{\sigma_X}(\mu_X - \mu_X) = 0$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1$$