# INTRODUCTION AUX PROBABILITES
# XI

Support du cours donné en $1^{re}$ année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2006-2007

# Table des matières

# Table des figures

# Chapitre 11

# Convergence d'une suite de variables aléatoires

## 1

### 1 Convergence en probabilité

**Définition 1.1 (Convergence en probabilité)**
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$. Une suite de variables aléatoires $\{X_1,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots\}$ sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$ converge en probabilité vers $X$ (variable aléatoire : $\Omega \to \mathbb{R}$)
Si :

$$\forall\ \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} P[\{|X_n - X| \geq \epsilon\}] = 0$$

notations équivalentes :

$$X_n \xrightarrow{P} X \qquad \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n = X(P)$$

**Théorème 1.1** *Soit* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$*. Soient* $X$*,* $\{X_1,\ \ldots\}$ *variables aléatoires définies sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$*, dont le second moment par rapport à l'origine existe et il est tel que :* $\lim_{n\to+\infty} E[(X_n - X)^2] = 0$

$$\Rightarrow$$

– 

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X(P)$$

– *Cette limite en probabilité est unique.*

Pour la démonstration de ce théorème on utilise les inégalités de Kolmogorov et Tchebycheff.

### 2 Convergence en moyenne quadratique

**Définition 1.2 (Convergence en moyenne quadratique)**
Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ et $X,\ (X_1,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots)$ variables aléatoires définies sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$ et dont le second moment $\mu'_2$ existe
On dit que la suite $X_1,\ \ldots,\ X_n$ *converge en moyenne quadratique* si

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[(X_n - X)^2\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n = X(mq) \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{mq} X$$

**Proposition 1.1**
*Si :*

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X(mq) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n = X(P)$$
$$\Leftrightarrow$$

*Convergence en moyenne quadratique* $\Rightarrow$ *Convergence en probabilité.*

## 3 Convergence presque sûre

**Définition 1.3 (Convergence presque sûre)**
Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ et $X,\ (X_1,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots)$ variables aléatoires définies sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$. On dit que la suite $(X_1,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots)$ converge *presque sûrement vers la variable aléatoire* $X$ si

$$P[\{\lim_{n\to+\infty} X_n = X\}] = 1 \Leftrightarrow X_n \underset{p.s}{\to} X \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n = X(p.s).$$

*Remarque :* Si $X = C$ *(avec* $C \in \mathbb{R}$ *constante)* $\Leftrightarrow$ $X$ *var. al. dégénérée en* $C$ alors on a convergence presque sûre vers $C$

**Théorème 1.2**

**1-** $\lim_{n\to+\infty} X_n = X(ps)$ *si et seulement si*

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \exists\ N > 0 : \quad \lim_{n\geq N} P[\{\sup |X_n - X| < \epsilon\}] = 0$$

**2-** *Si*

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X(p.s) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} X_n = X(P)$$

# 2 Lois des grands nombres

## 1 Loi forte (resp.Loi faible) des grands nombres

**Définition 2.1**
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, et $(X_1,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots)$ une suite de variables aléatoires sur$(\Omega,\ \mathcal{A})$ pas forcément indépendantes et tel que $\forall\ i\ \ E[X_i]$ existe.
Si la variable aléatoire transformée définie par :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} [X_i - E(X_i)]}{n} = \bar{X} - \frac{\sum E[X_i]}{n}$$

converge vers $0$ suivant un mode de convergence, alors la suite obéit à la loi des grands nombres :

***** Si $\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0(P) \Rightarrow$ la suite obéit à la loi faible des grands nombres.

***** Si $\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0(p.s) \Leftrightarrow$ la suite obéit à la loi forte des grands nombres.

**Théorème 2.1 (Application à un échantillon)**
*Soient* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, *et* $X_1,\ X_2,\ \ldots\ \ X_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$, *suivant la même loi de probabilité et telles que :*

$$\forall\ i \in \{1,\ 2, \ldots\ \ n\}\ \ E[X_i] = \mu,\ \ var[X_i] = \sigma^2$$

*existent, alors la suite* $\{X_1,\ \ldots,\ X_n\}$ *obéit à la loi faible et aussi à la loi forte des grands nombres.*

Pour la preuve de ce théorème on utilise la généralisation de l'inégalité de Tchebycheff $\Leftrightarrow$ inégalité de Kolmogorov.

## 2 Convergence en loi

**Définition 2.2 (Convergence en loi)**
Soient les variables aléatoires $X,\ \{X_1,\ \ldots\ X_n\}$ et les fonctions de répartition correspondantes, $F_X,\ \{F_{X_1},\ \ldots\ F_{X_n}\}$. On dit que la suite $\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$ *converge en loi vers* $X$ si

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en tout point de continuité $x$ de $F_X$.

$$\Leftrightarrow$$

$$X_n \underset{\mathcal{L}}{\to} X \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} X_n = X(\mathcal{L})$$

**Exemple 2.1**

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$X_n : \mathcal{N}\left(\frac{1}{n},\ 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{n}\right)} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(t-\frac{1}{n}\right)^2}{1+\frac{1}{n}}} dt = F_X(x)$$

On pose $z = \dfrac{t - \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}}$

**Théorème 2.2 (de Lévy-Cramer-Duguc)**

1. $$X_n \underset{\mathcal{L}}{\to} X \Rightarrow \Phi_{X_n}(\omega) \to \Phi_X(\omega)$$

   *uniformément dans tout intervalle fini.*

2. $$\begin{array}{ll} \textit{Si } \Phi_{X_n}(\omega) & \to \Phi(\omega) \textit{ avec } \Re\Phi(\omega) \textit{ continue à } \omega = 0 \\ & \Rightarrow \Phi(\omega) \textit{ fonction caractéristique d'une variable aléatoire} X \\ & \textit{et} \quad X_n \underset{\mathcal{L}}{\to} X \end{array}$$

**Remarque 2.1** *Tableau de la hiérarchie des convergences*

$$\begin{array}{ccc} \text{Conv. en moyenne quadr.} & & \\ & \searrow & \\ & & \text{Conv. en probabilité} \;\rightarrow\; \text{Conv. en loi} \\ & \nearrow & \\ \text{Convergence presque sûre} & & \end{array}$$

## 3 Th. "Limite Centrale"

**Théorème 2.3 (Théorème de la limite centrale)**

*Soient* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, *et* $X_1,\ X_2,\ \ldots\ \ X_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$, *suivant la même loi de probabilité et telles que :*

$$\forall\ \ i \in \{1,\ 2, \ldots\quad n\}\ \ E[X_i] = \mu,\ \ var[X_i] = \sigma^2$$

*existent,*

$$\Rightarrow$$

*la suite* $Y_1,\ Y_2,\ \ldots, Y_n,\ \ldots$ *où*

$$Y_n = \sqrt{n}\ \ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)$$

*converge en loi vers une variable aléatoire* $Y : \mathcal{N}(0,\ 1)$.

## 4 Th. de De Moivre- Laplace

**Théorème 2.4 (Théorème de De Moivre-Laplace)**

$$\mathcal{B}(n,\ p) \rightarrow \mathcal{N}(0,\ 1)$$

*Convergence en loi de la loi binomiale vers la loi* $\mathcal{N}(0,\ 1)$.

*Soient* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, *et* $X_1,\ X_2,\ \ldots\ \ X_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$, *suivant la même loi de probabilité binomiale* $\mathcal{B}(n,\ p)$.

$$\Rightarrow$$

*La suite* $Y_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$ *converge en loi vers la loi Normale centrée réduite :*

$$Y_n \underset{n \rightarrow \infty}{\overset{\mathcal{L}}{\rightarrow}} Y : \mathcal{N}(0,\ 1)$$

**Preuve :**

La fonction caractéristique de $X_n$ :

$$\Phi_{X_n}(\omega) = \left[pe^{j\omega} + 1 - p\right]^n$$

$$\Rightarrow \Phi_{Y_n} = \left[ pe^{\dfrac{j\omega}{\sqrt{npq}}} + 1 - p \right]^n \times e^{\dfrac{-j\omega np}{\sqrt{npq}}}$$

$$\Rightarrow \ln \Phi_{Y_n} = n \ln \left[ pe^{\frac{j\omega}{\sqrt{npq}}} + 1 - p \right] - \frac{j\omega np}{\sqrt{npq}}$$

Développement limité de l'exponentiel à l'ordre 2 :

$$\Rightarrow \ln \Phi_{Y_n} \underset{n\to\infty}{\simeq} n \ln \left[ 1 + p \left( \frac{j\omega}{\sqrt{npq}} - \frac{\omega^2}{2npq} \right) \right] - \frac{j\omega np}{\sqrt{npq}}$$

Développement limité du $\ln$ à l'ordre 2 :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\simeq} x - \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{Y_n}(\omega) \underset{n\to\infty}{\simeq} -\frac{\omega^2}{2q} + \frac{1}{2}\frac{p\omega^2}{q}$$

avec $q = 1 - p$

$\Rightarrow \ln \Phi_{Y_n} \underset{n\to\infty}{\simeq} -\frac{\omega^2}{2}$ et

$$\Phi_{Y_n} \underset{n\to\infty}{\simeq} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0,\ 1)$.