INTRODUCTION AUX PROBABILITES
X

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2006-2007

Table des matières

Table des figures

Chapitre 10

Indépendance de deux variables aléatoires

1 Variables aléatoires indépendantes

Définition 1.1
Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ donc $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B})$
On dit que X, Y sont indépendantes si quelque soit le couple de boréliens B_i, B_j, on a :

$$P[\{X \in B_i\} \cap \{Y \in B_j\}] = P[\{X \in B_i\}]P[\{Y \in B_j\}]$$

Autrement : *la loi de probabilité P_{XY} du couple (X, Y) est égale au produit des lois P_X et P_Y :*

$$P_{XY} = P_X\, P_Y$$

Théorème 1.1 (indépendance)
Deux variables aléatoires X, Y sont indépendantes si et seulement si la fonction de répartition $H(x, y) = P[\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}]$ est égale au produit des fonctions de répartitions $F_X(x), G_Y(y)$ (appelées fonctions de répartition marginales)

$$\Leftrightarrow H(x, y) = F_X(x)\, G_Y(y)$$

Théorème 1.2
Si deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes :
$(P[\{X_1 \in A\} \cap \{X_2 \in B\}] = P[\{X_1 \in A\}]\, P[\{X_2 \in B\}])$

$$\Rightarrow\ E(X_1, X_2) = E(X_1)\, E(X_2)$$

Remarque 1.1
Attention : *La réciproque n'est pas toujours vraie !*

2 Variables aléatoires dépendantes

Définition 2.1

$$\begin{array}{lll} P[\{X_i \in A_i\} \cap \{X_j \in A_j\}] & = P[X_i \in A_i] | \{X_j \in A_j\}] & P[\{X_j \in A_j\}] \\ & \Leftrightarrow \ P[\{X_i X_j\} \in A] & A = \text{“}A_i \cap A_j'' \end{array}$$

1 Covariance de deux variables aléatoires $X_1,\ X_2$

Définition 2.2

$$cov[X_1,\ X_2] = E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] = E[X_1 X_2] - \mu_{X_1}\mu_{X_2}$$

Remarque 2.1

Quand X_1 et X_2 sont indépendantes, d'après le théorème précédent :
$E[X_1,\ X_2] = E[X_1]\ E[X_2]$

$$\Rightarrow \quad cov[X_1,\ X_2] = 0$$

Théorème 2.1

Soient X_k, avec $k \in \{1,\ \ldots\ p\}$, variables aléatoires et, $a_k,\ b_k$, avec $k \in \{1\ \ldots\ p\},$ une suite de nombres réels alors :

$$\Rightarrow var\left[\sum_{k=1}^{p} a_k X_k + b_k\right] = \sum_{k=1}^{p} a_k^2 var\left[X_k\right] + \sum_{i \neq j} a_i a_j cov\left[X_i X_j\right]$$

Théorème 2.2

Soient X_k, avec $k \in \{1,\ \ldots\ p\}$,, variables aléatoires indépendantes et, $a_k,\ b_k$, avec $k \in \{1\ \ldots\ p\},$ une suite de nombres réels alors :

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{p} a_k X_k + b_k\right] &= \sum_{k=1}^{p} a_k E\left[X_k\right] + b_k \\ var\left[\sum_{k=1}^{p} a_k X_k + b_k\right] &= \sum_{k=1}^{p} a_k^2 var\left[X_k\right] \end{aligned}$$

3

Définition 3.1 (échantillon)

On définit un échantillon par les données suivantes.

1. Le n-uplet de variables aléatoires $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ indépendantes qui suivent la même loi de probabilités avec paramètres $(\mu,\ \sigma^2)$.
2. X une variable aléatoire abstraite appelée *variable aléatoire parente,* (qui suit la même loi) avec paramètres $(\mu,\ \sigma^2)$
3. $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ *la moyenne empirique de l'échantillon,* qui vérifie les propriétés :

$$E[\bar{X}] = \mu \qquad var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$