EISTI

OPTIMISATION

1ère année ingénieurs

rachid.chelouah@eisti.fr

OPTIMISATION

- **Concepts de base: recherche opérationnelle**
- **Programmation linéaire**
- **Méthode du simplexe**
- **Logiciels (**Scilab, Solveur Excel, Solveur SAS, LINDO, Eclipse**)**
- **Variables artificielles et pénalités**
    - ✓ **Méthode du grand M**
    - ✓ **Méthode des 2 phases**
- **Dualité**
- **Programmation en nombres entiers PLNE**
- **Programmation en nombres binaires**
- **Heuristiques**
    - ✓ **Algorithmes génétiques**
    - ✓ **Algorithme de colonie de fourmis**
    - ✓ **Algorithme de recherche tabou**

INTRODUCTION

$$\begin{cases} \text{Minimiser } Z = -10x_1 - 11x_2 \\ \text{Avec } 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale en nombres réels est $z = -59$ pour $x_1 = 5.9$ et $x_2 = 0$.

L'arrondi de cette solution serait de $x_1 = 6.0$ et $x_2 = 0$ avec $z = -60$

Cette solution n'est pas solution de PLNE car elle ne satisfait pas la contrainte

La solution entière du problème est $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$ avec $z = -54$

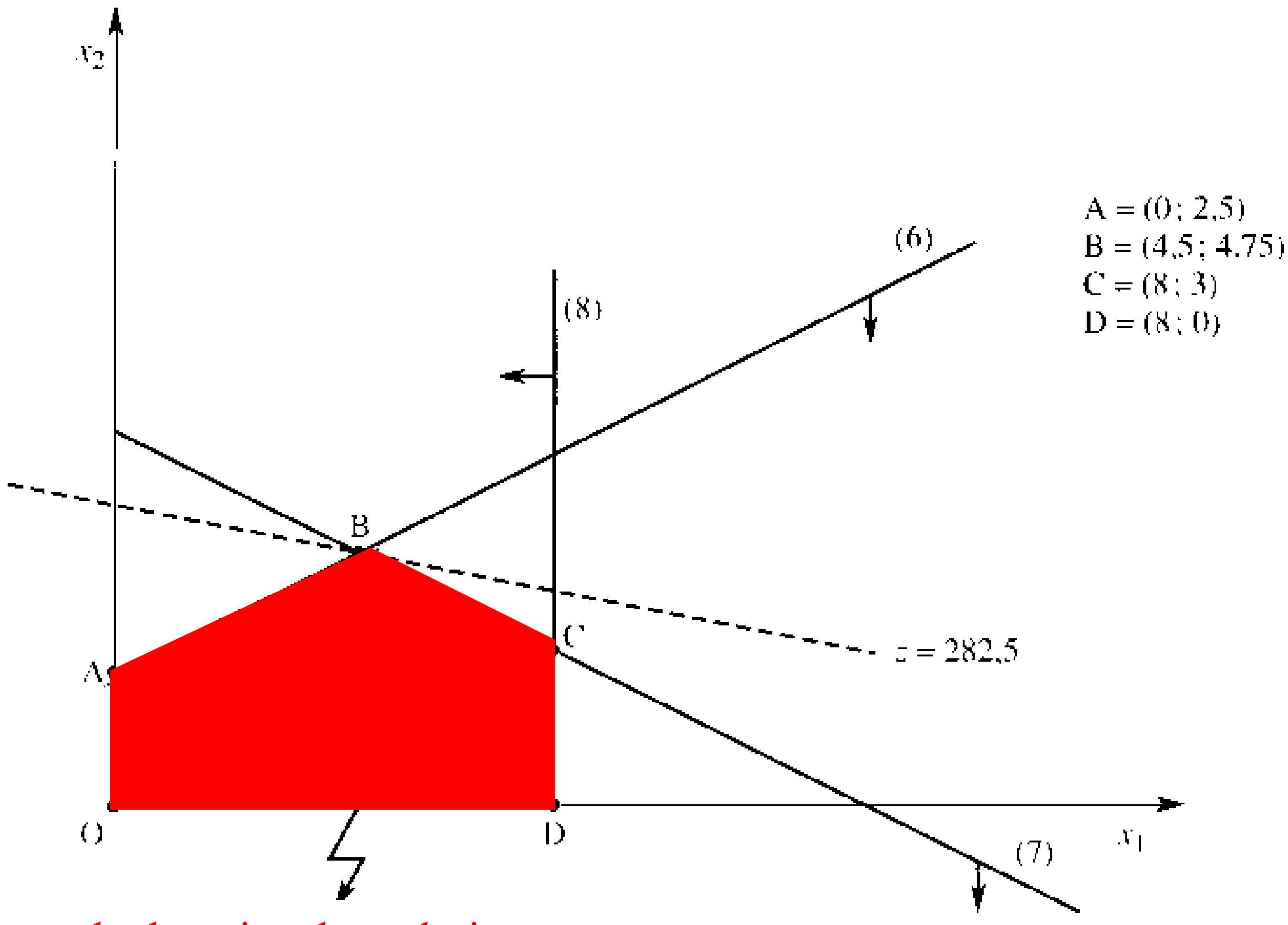
On remarque qu'elle est très loin de la solution optimale continue

➡ On a besoin des méthodes propres pour pouvoir résoudre les PLNE

FORMULATION

- **Max $Z = 10 x_1 + 50 x_2$**
  - Sujet à
    - $-x_1 + 2 x_2 \leq 5$
    - $x_1 + 2 x_2 \leq 14$
    - $x_1 \leq 8$
  - et
    - $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
    - x_1, x_2 entiers

PRESENTATION



le domaine des solutions réalisables

SOLUTION EN NOMBRES REELLES

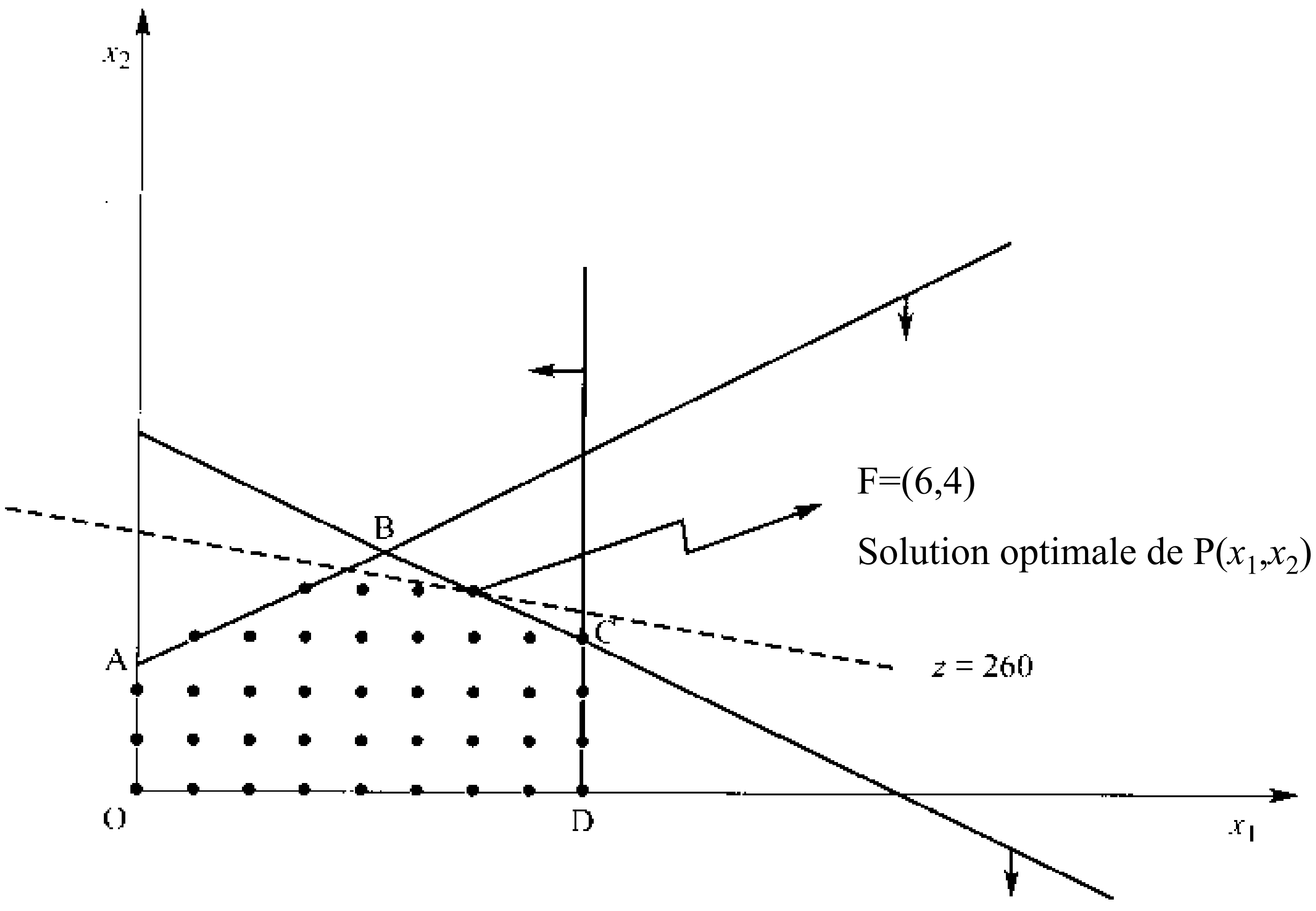
- On commence par résoudre la formulation de relaxation du problème en entiers, c-à-d le problème en variables continues (LP).

  Ici, on obtient :
  - $z = 282.5$
  - $x_1 = 4.5$
  - $x_2 = 4.75$
- Si la solution est en entiers, on s'arrête, on a trouvé l'optimal. Ici ce n'est pas le cas, mais la valeur *z* obtenue est une borne supérieure pour l'optimum en entiers.

PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRE ENTIER (Méthode arborescentes)

- Appelées aussi méthodes de séparation et évaluation (Branch and Bound)
- Le principe est de choisir une variable x et de **séparer** le problème en 2 sous problèmes selon les valeurs de cette variable *x*
- Pour le PLNE général, on sépare en considérant un entier P et les 2 sous problèmes $x \leq p$ et $x \geq p + 1$
- Les PLNE des sous problèmes peuvent à leur tour être séparés, ce qui forme progressivement une arborescence dont chaque nœud correspond à un sous problème
- La majorité des sous problèmes sont en effet éliminés grâce à une **évaluation**
- Dès que la recherche arborescente a trouvé une première solution entière, ayant un certain coût z, on peut ignorer un nœud P si $eval(P) \geq z$ (cas minimisation)
- Pour le PLNE général, nous utiliserons la méthode de **Dakin** qui utilise le PL relaxé pour évaluer les solutions

PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRE ENTIER



METHODE GENERALE

- Si la solution n'est pas entière, on partitionne le domaine : on choisit arbitrairement une variable qui est fractionnaire dans la solution optimale relaxée, par exemple ici x_1.

- On applique des contraintes supplémentaires dues à la nature de la variable, ici par exemple on impose soit $x1 \leq 4$, soit $x_1 \geq 3$

<u>Question</u> :

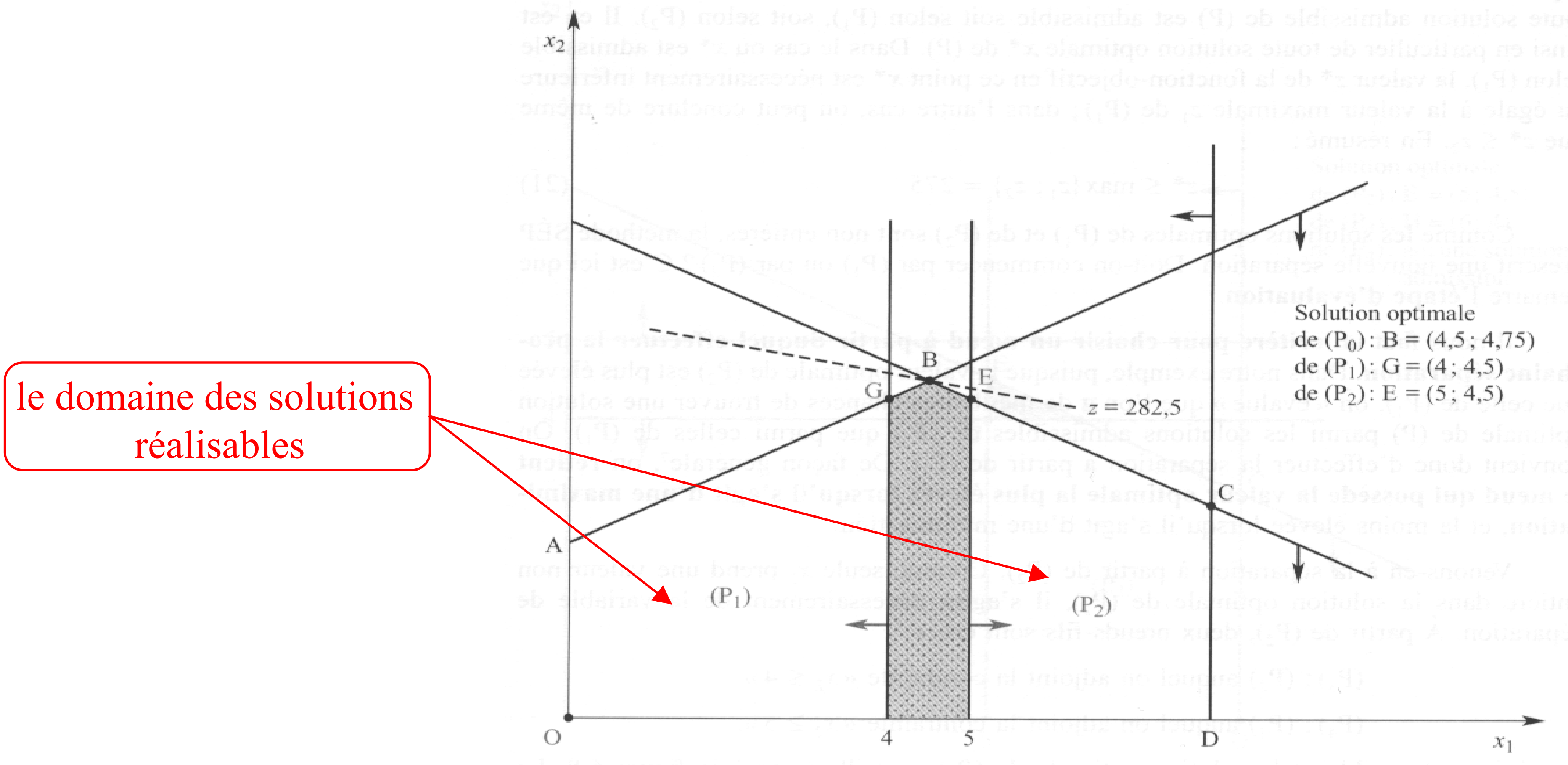
pourquoi pouvons nous éliminer les solutions $0 < x_1 < 4$ et $5 < x_1 < 8$?

SEPARATION

- On a donc maintenant deux sous-problèmes :

  P1. Problème initial + contrainte $0 < x_1 < 4$

  P2. Problème initial + contrainte $5 < x_1 < 8$.



METHODE DE DAKIN POUR PLNE

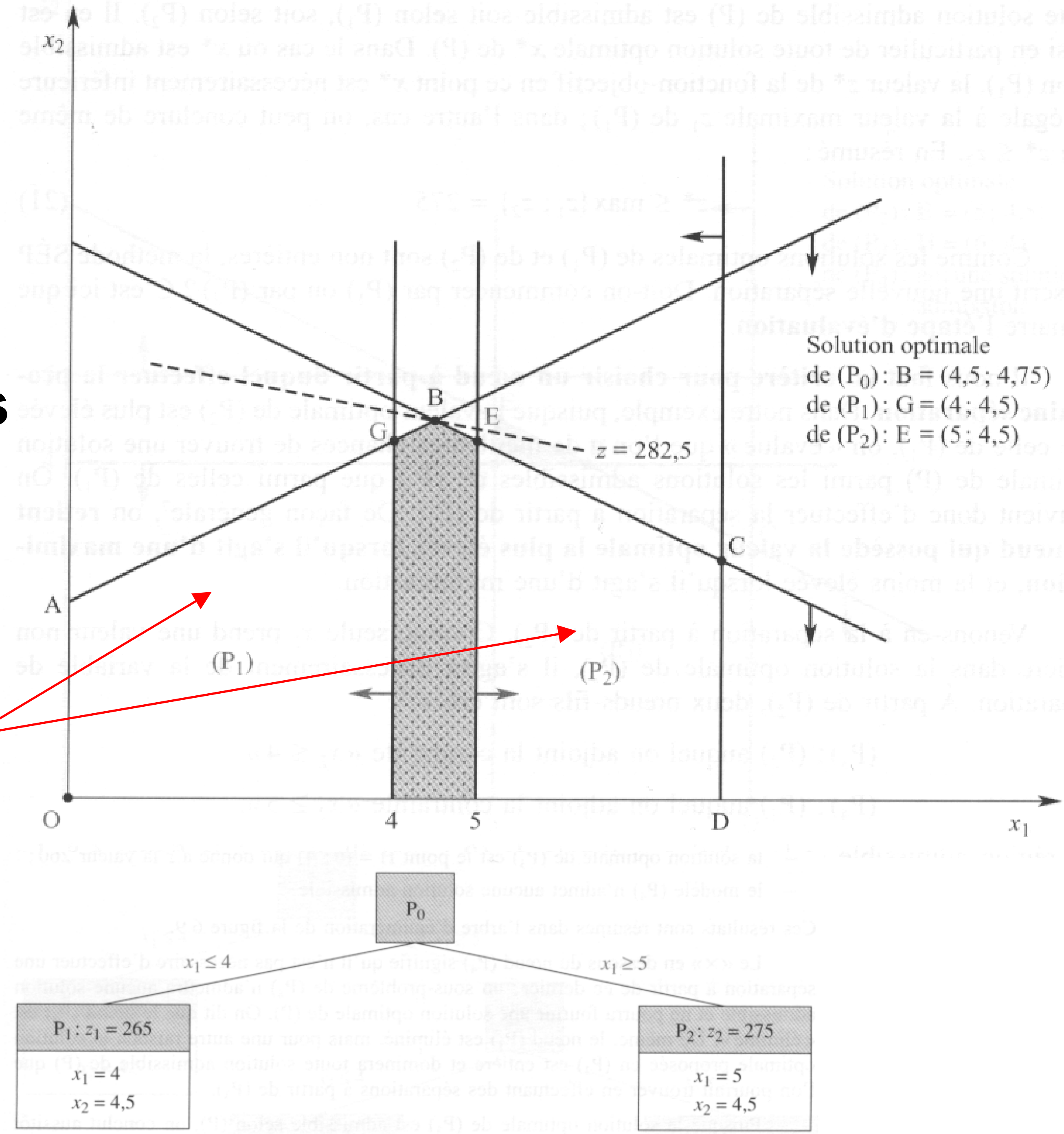
- **Méthode de séparation et d'évaluation progressive** *(Branch-and-Bound Technique)*
  - Choix de la variable de séparation
    - Critère de la variable la plus distante
    - Critère du meilleur c_j

METHODE DE DAKIN POUR PLNE

Critère de la variable la plus distante

Séparation selon x_1

le domaine des solutions réalisables



SEPARATION

- On constate qu'on a, ce faisant, éliminé la région contenant l'optimum de LP. On a créé un branche d'un arbre; On a maintenant deux problèmes qu'on peut de nouveau Résoudre en LP.
- On évalue les deux PLs (P_1, P_2)
  - La solution de relaxation (LP) pour la région $P_{2,}$ correspondant au point E est

    $z = 275$

    $x_1 = 5$

    $x_2 = 4.5$
  - La solution de relaxation (LP) pour la région $P_{1,}$ correspondant au point E est

    $z = 265$

    $x_1 = 4$

    $x_2 = 4.5$

On choisit dans un premier temps le PL qui nous donne une meilleure solution (dans notre cas, c'est le PL le P2.

RECURSION

- Comme x_2 est toujours fractionnaire, on décide de séparer sur cette variable, on sépare donc la région P_2 entre deux zones :
  celle pour $x_2 \geq 5$ et celle pour $x_2 \leq 4$.

- Nous voici avec deux nouveaux sous-problèmes
  P_3. Problème P_2 + contrainte $x_2 \geq 5$
  P_4. Problème P_2 + contrainte $x_2 \leq 4$.

- On choisi donc de regarder l'un ou l'autre des nouveaux sous-problèmes, par exemple le sous-problème P_4, or ce problème n'est pas réalisable en Entiers.

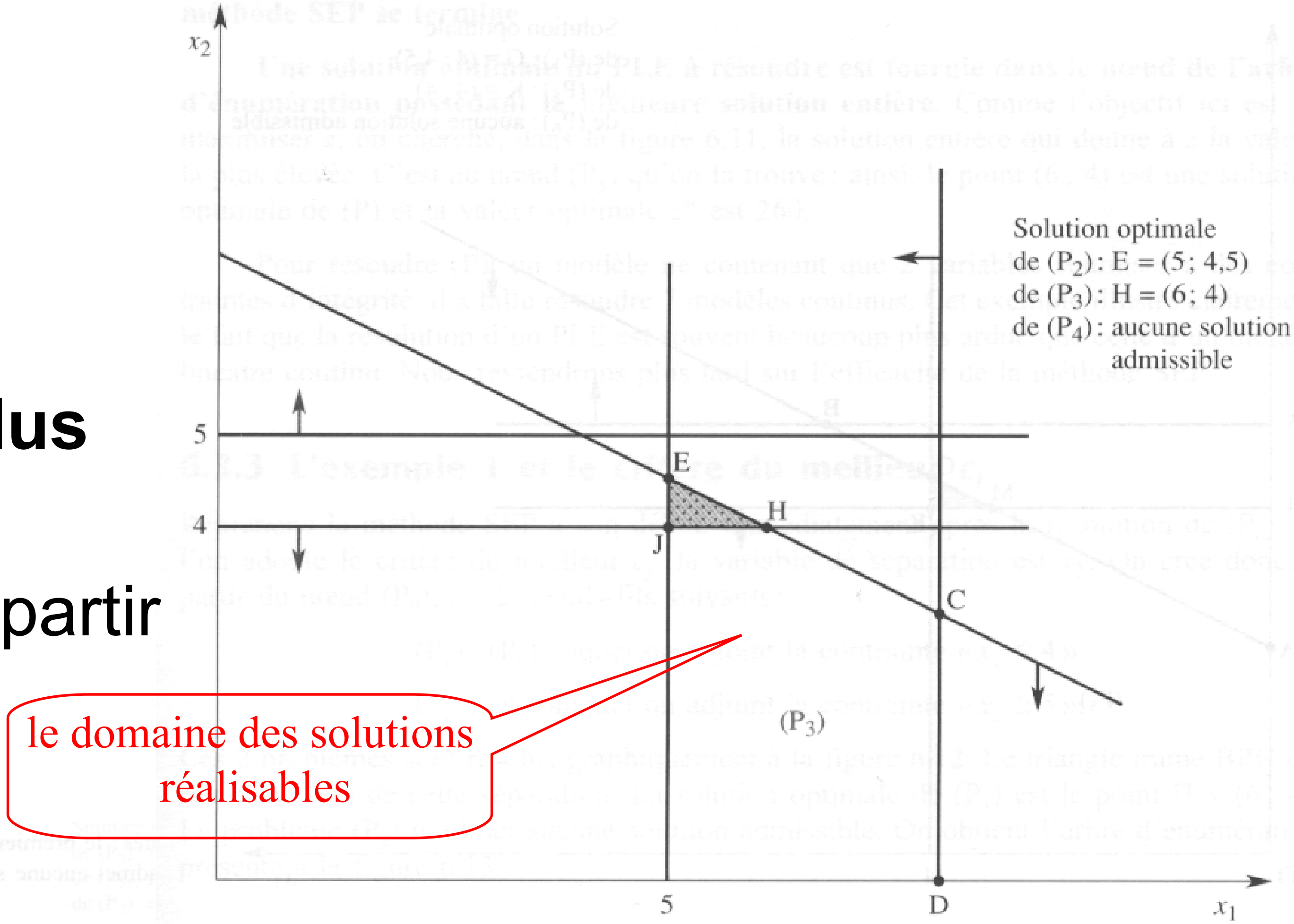
En résolvant le problème de relaxation LP lié au sous-problème P_3, on trouve l'optimum avec

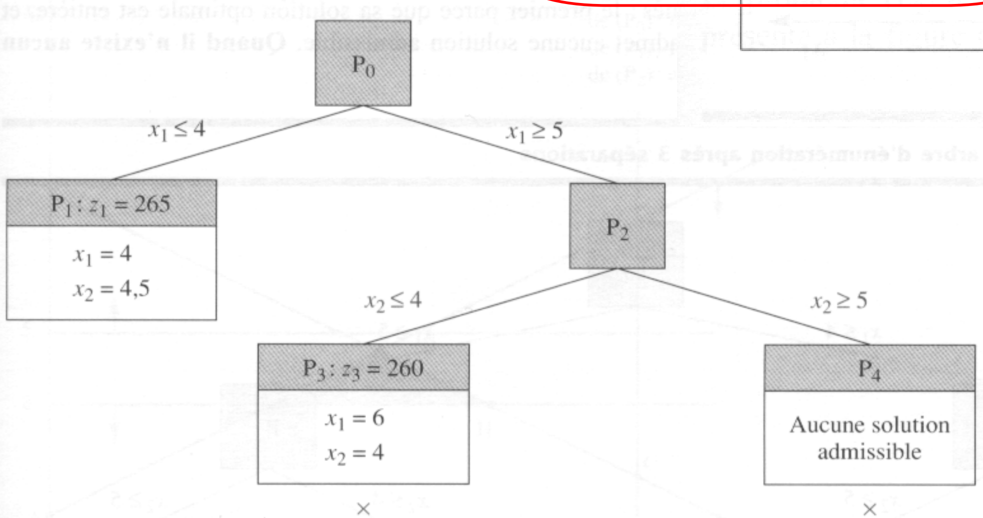
$z = 260$
$x_1 = 6$
$x_2 = 4$

METHODE DE DAKIN POUR PLNE

Critère de la variable la plus distante

Séparation à partir de P_2





SEPARATION / EVALUATION

• On revient au P_1, on sépare le domaine sur la variable x_2 et on obtient deux zones : celle pour $x_2 \geq 5$ et celle pour $x_2 \leq 4$.

Nous voici avec deux nouveaux sous-problèmes

P_5. Problème P_1 + contrainte $x_2 \leq 4$

P_6. Problème P_1 + contrainte $x_2 \geq 5$.

• On choisi donc de regarder l'un ou l'autre des nouveaux sous-problèmes, par exemple le sous-problème P_6, or ce problème n'est pas réalisable en Entiers.

En résolvant le problème de relaxation LP lié au sous-problème P_5, on trouve l'optimum avec

$z = 240$

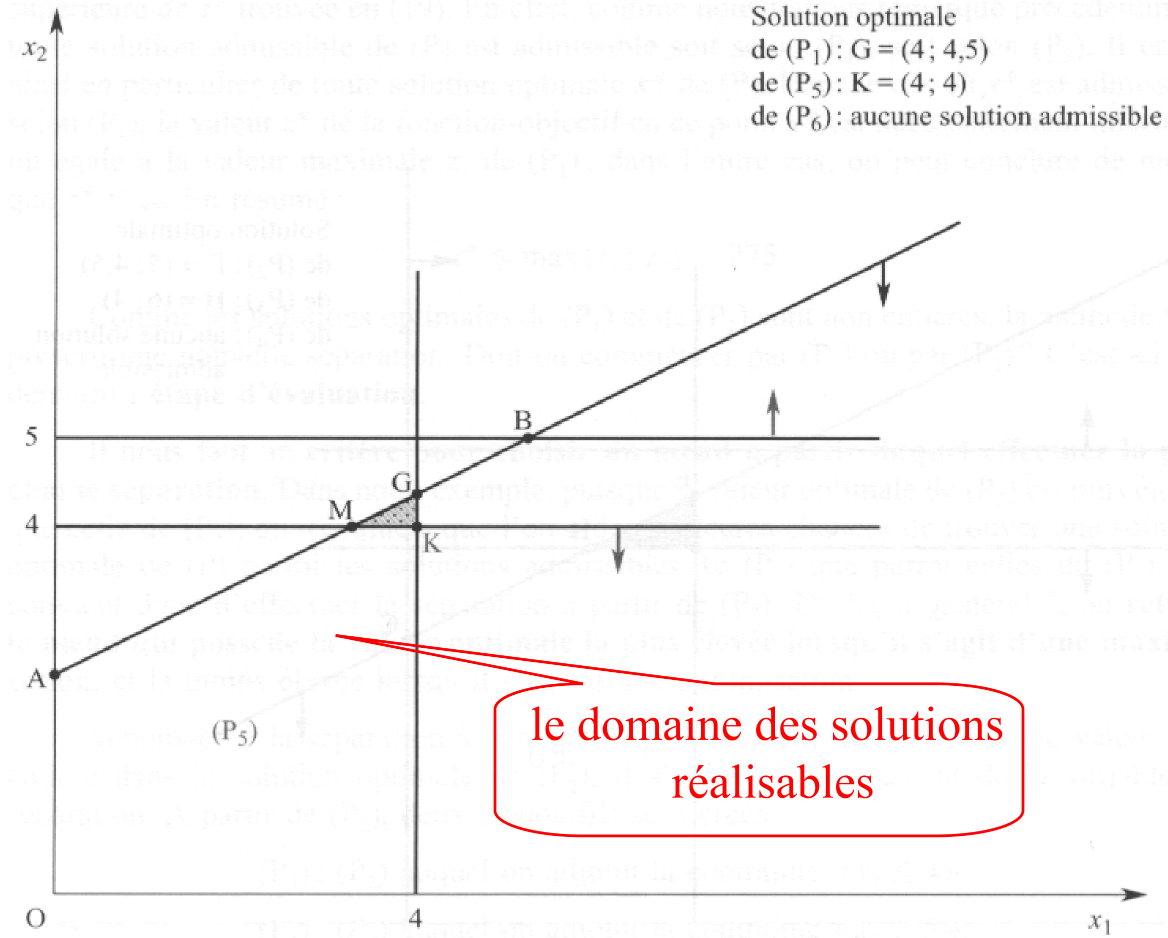
$x_1 = 4$

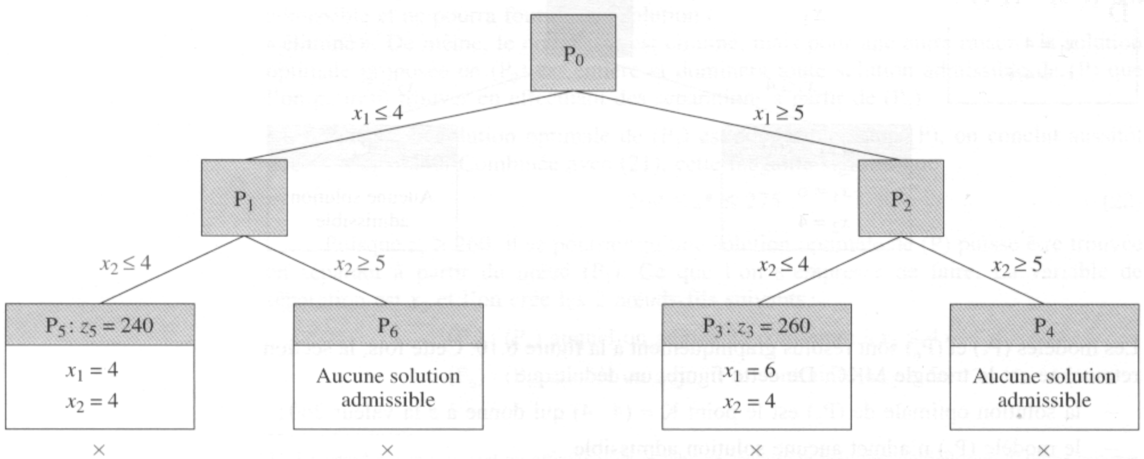
$x_2 = 4$

METHODE DE DAKIN POUR PLNE

Critère de la variable la plus distante

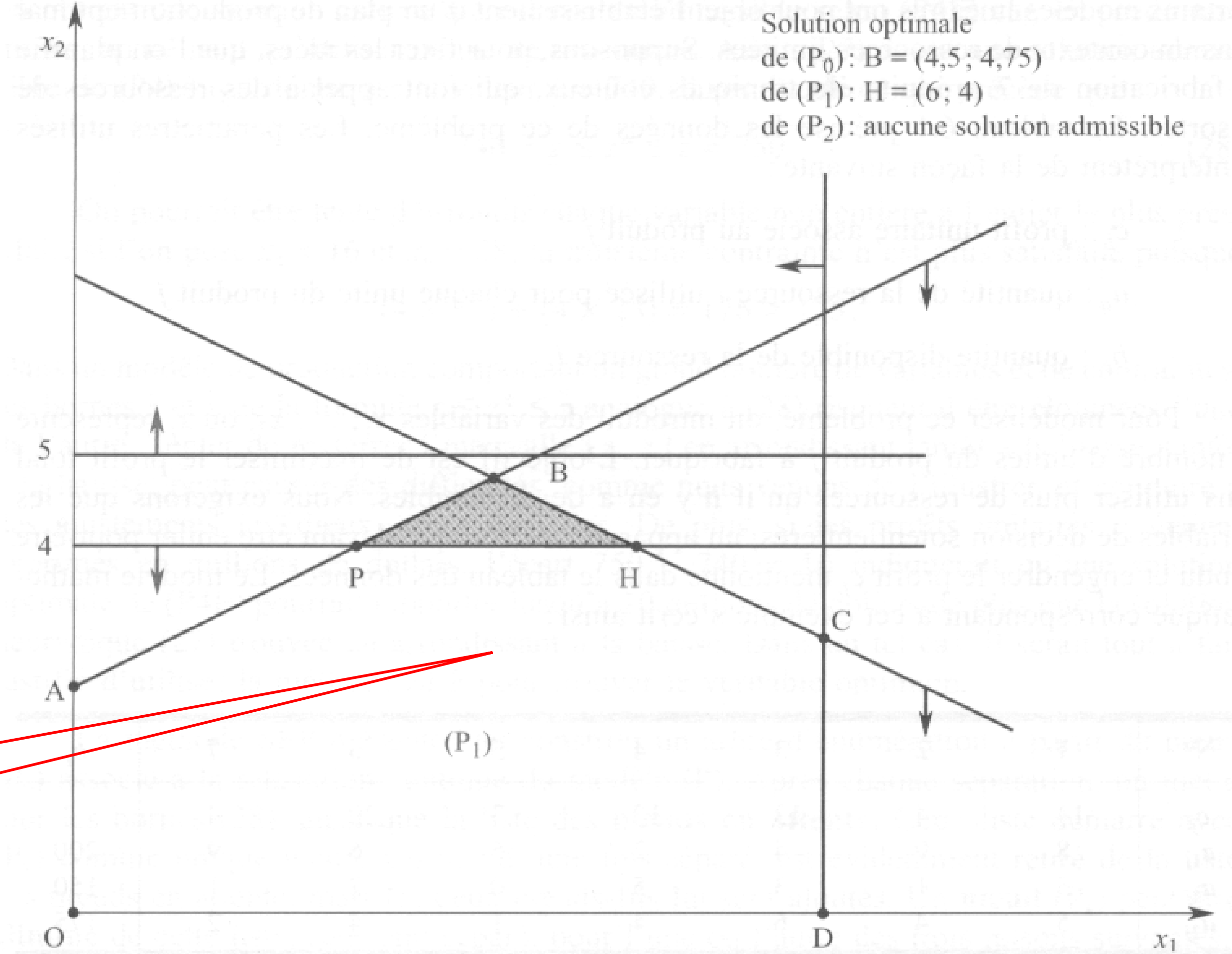
Séparation à partir de P_1



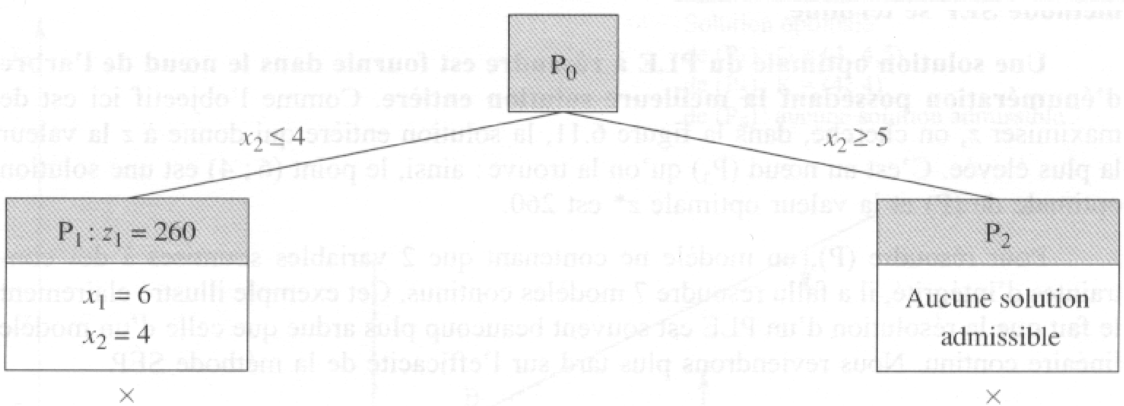


METHODE DE DAKIN POUR PLNE

Critère du meilleur c_j



le domaine des solutions réalisables



LABEL DES POINTS

• L'algorithme de séparation/évaluation organise le domaine des solutions sous forme d'un arbre de domaine.

• L'algorithme divise pour régner, et converge nécessairement du au fait qu'il élimine toujours des points à chaque étape de séparation, alors que ceux-ci sont en nombre fini.

ATTENTION : séparation-évaluation n'est pas glouton : on effectue des retours en arrière (backtrack).

REGLES DE STERILISATION DE SOMMETS

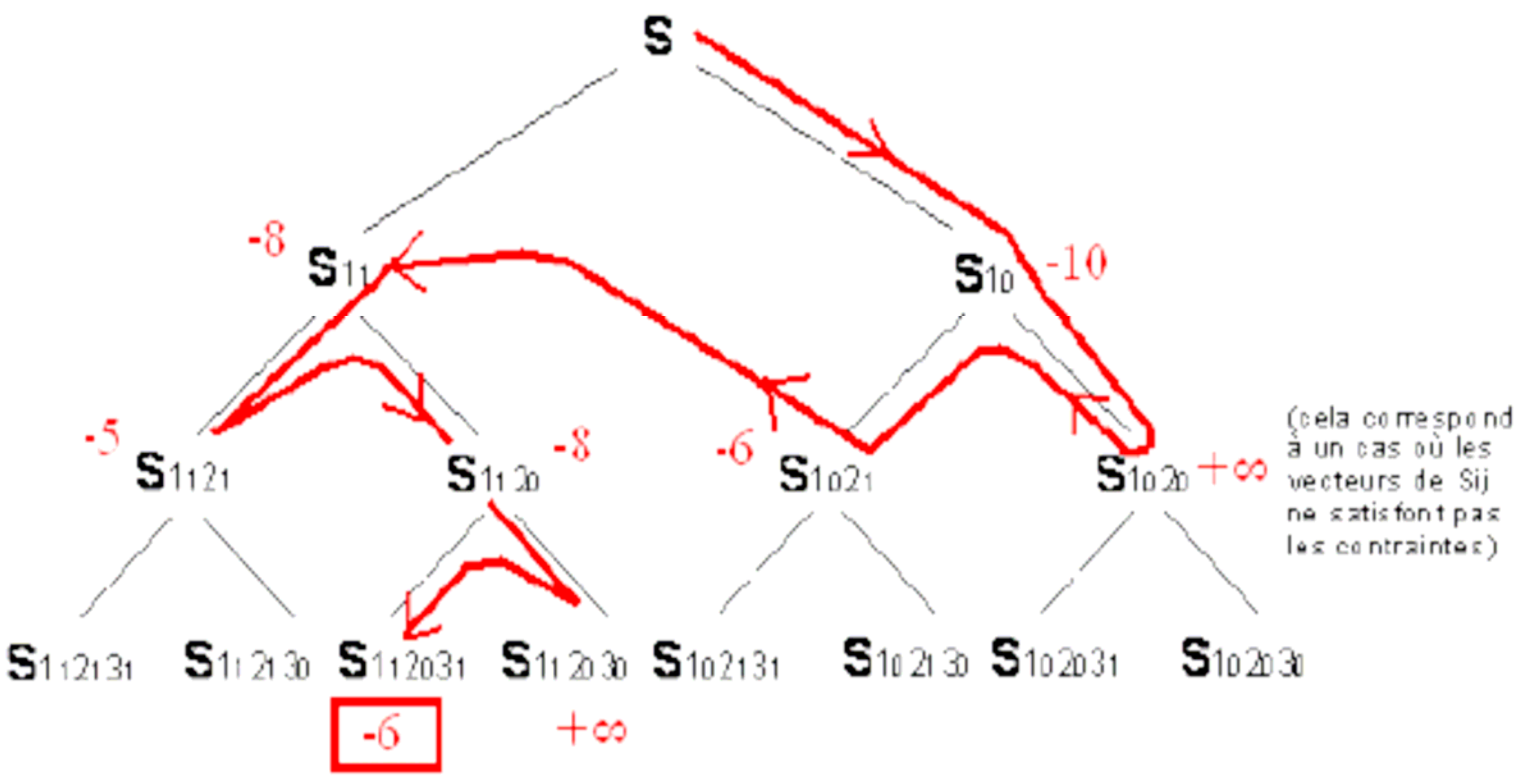
1. On dit qu'un sommet de l'arbre qu'il est inutile de séparer est *stérilisé*. Il y a plusieurs possibilités pour cela :
   1.1 Le sommet est associé à une solution réalisable candidate (séparer ne l'améliorera pas)
   1.2 Le sommet est associé à un sous-problème non-réalisable
   1.3 La valeur z optimal du sous-problème associé est inférieure (pour un problème max, et vice-versa pour un problème min) à la borne inférieure courante.
2. Un sous-problème peut-être éliminé directement si
   2.1 Le sous-problème est non-réalisable
   2.2 La borne inférieure courante est supérieure à la valeur z du sous-problème.

RETOUR EN ARRIERE

- On peut résoudre les problèmes de séparation-évaluation soit en largeur d'abord comme on l'a fait dans le cadre de l'exemple présenté ici (on évalue tous les sous-problèmes à un niveau avant de séparer au niveau inférieur)

- Ou alors en profondeur d'abord. On choisit au hasard un sous domaine après séparation sans évaluation et on réitère le procède jusqu'à ce qu'on ne peut plus séparer, puis on remonte arbre (voir le schéma suivant)

METHODE D 'EXPLORATION EN PROFONDEUR
cas d'une minimisation



CONCLUSION

Ce sont des méthodes bien souvent itérative, à chaque tour :
On essaie de résoudre le PL en nombre réel.

- Si on trouve une solution extrême entière, on a trouvé la bonne solution
- Sinon on va chercher une (ou plusieurs) contraintes supplémentaire qui va éliminer la solution extrême sans éliminer la solution entière

➡ Cela s'appelle une coupe

Si les coupes sont correctement choisies à chaque étape, le polyèdre P(initial) sera ainsi progressivement réduit jusqu'à coïncider avec l'enveloppe convexe des solutions entières au moins au voisinage de la solution optimale.

Avec cette contrainte supplémentaire, on obtient un *PL augmenté*. La solution continue du problème augmenté deviendra alors entière.

BRANCH AND CUT (COUPE)

- Dans l'algorithme Branch-and-Bound, avant la division en sous-problèmes, on génère des coupes valides pour la solution fractionnaire courante $\bar{x}$.

- Généralement, les coupes sont générées jusqu'à ce que la valeur $\bar{f}$ de la fonction objective n'augmente pas beaucoup.

- Par défaut, les solveurs utilisent les coupes générales.

- Les classes des coupes générales les plus utilisées sont les coupes de :
  - ✓ Gomory 1958
  - ✓ Gondrau 1973

Gomory cuts, *Mixed-Integer Rounding (MIR) cuts*, *[flow] cover cuts*.

EXEMPLE

Soit un problème du sac à dos qui est donnée par le PL suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 10\mathbf{x_1} + 11\mathbf{x_2} \\ 10\mathbf{x_1} + 12\mathbf{x_2} \leq 59 \\ \mathbf{x_i} \geq 0 \text{ et entiers} \\ \forall\ i = 1, 2. \end{cases}$$

T1

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{b_i}$	**base**
10	12	1	59	$\mathbf{x_3}$
-10	-11	0	0	$\mathbf{z}$

Le dernier le tableau du simplexe qui fournit la solution optimale du problème continu est :

T2

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{b_i}$	**base**
1	12/10	1/10	59/10	$\mathbf{x_1}$
0	1	1	59	$\mathbf{z}$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} = 59/10 = 5.9, \quad \mathbf{x_1} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \overline{x} \text{ solution non réalisable} \\ \mathbf{x_2} = \mathbf{x_3} = 0 \\ \mathbf{z} = 59 \end{cases}$$

METHODE DE GONDRAU
DES "CONGRUENCES DECROISSANTES"

La solution du problème n'est pas entière. Alors on peut créer de nouvelles contraintes des "coupes" de telle façon que la solution optimale du problème continu ne vérifie pas ces contraintes-coupes.

$\Rightarrow$ On veut avoir un $\mathbf{x_1}$ avec une valeur positive et entière

$\Leftrightarrow \mathbf{x_1} = 59/10 - \mathbf{(}12/10)*\mathbf{x_2} - \mathbf{(}1/10)*\mathbf{x_3}$

$\Leftrightarrow 59/10 = k*(\ \mathbf{(}12/10)*\mathbf{x_2} + \mathbf{(}1/10)*\mathbf{x_3}\mathbf{)}$ (avec k multiple de 10)

$\Leftrightarrow 12*\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} \equiv 59$ [mod. 10]

$\Leftrightarrow 2*\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} \equiv 9$ [mod. 10]

$\Rightarrow$ la meilleure coupe est $2*\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} \geq 9$

ETAPE 1

$\Rightarrow$ nouvelle variable d'écart $\mathbf{x_4}$ $\Leftrightarrow$ $2*\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} - \mathbf{x_4} = 9$

T3

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	base
1	12/10	1/10	0	59/10	x_1
0	-2	-1	1	-9	x_4
0	1	1	0	59	z

1/-2	1/-1	ratio

$\Rightarrow$ Le Primal non réalisable car $\mathbf{x_4} = -9 < 0$

$\Leftrightarrow$ On utilise l'algorithme Prima-Dual pour changer de base

$\Rightarrow$ On fait sortir la variable $\mathbf{x_4}$ de la base, pour la variable entrante :

$$\min\left\{ -C_j/\text{ligne}_j \right\} = \min\left\{ -(1/-2); -(1/-1) \right\} = 1/2$$

$\Rightarrow$ On fait rentrer la variable $\mathbf{x_2}$ dans la base

ETAPE 1

$\Rightarrow$ On obtient le tableau suivant :

T4

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	base
1	0	-1/2	+12/20	1/2	x_1
0	1	1/2	-1/2	9/2	x_2
0	0	1/2	1/2	54.5	z

La nouvelle solution est : $\mathbf{x_1} = 1/2$ et $\mathbf{x_2} = 9/2$

La solution primale réalisable mais pas entière $\Rightarrow$ donc pas optimale

$\Rightarrow$ On applique la méthode des coupes à nouveau

$\Rightarrow$ la deuxième coupe est $\mathbf{x_3} + \mathbf{x_4} \geq 1$

ETAPE 2

⇒ nouvelle variable d'écart $\mathbf{x_5}$ ⇔ $\mathbf{x_3} + \mathbf{x_4} - \mathbf{x_5} = 1$

T5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	base
1	0	-1/2	12/20	0	1/2	x_1
0	1	1/2	-1/2	0	9/2	x_2
0	0	-1	-1	1	-1	x_5
0	0	1/2	1/2	0	54.5	z

⇒ Le Primal non réalisable car $\mathbf{x_5} = -1 < 0$

⇔ On utilise l'algorithme Prima-Dual pour changer de base

⇒ On fait sortir la variable $\mathbf{x_5}$ de la base, pour la variable entrante :

$$\min\left\{-C_j/\text{ligne}_j\right\} = \min\left\{-((1/2)/-1); -((1/2)/-1)\right\} = 1/2$$

⇒ On fait rentrer la variable $\mathbf{x_3}$ dans car on a déjà fait sortir $\mathbf{x_4}$ de la base

ETAPE 2

$\Rightarrow$ On obtient le tableau suivant :

T6

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{b_i}$	**base**
1	0	0	11/10	-1/2	1	$\mathbf{x_1}$
0	1	0	-11	1/2	4	$\mathbf{x_2}$
0	0	1	1	-1	1	$\mathbf{x_3}$
0	0	0	0	1/2	54	$\mathbf{z}$

La nouvelle solution est :

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} = 1,\ \mathbf{x_2} = 4,\ \mathbf{x_3} = 1 \ (\mathbf{x_1} \text{ est bien une solution optimale, elle est entière}) \\ \mathbf{z} = 54 \end{cases}$$

INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Il est intéressant de porter sur le graphique les contraintes correspondant aux coupes :

<u>1ère coupe</u> : $2\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} \geq 9$

En éliminant $\mathbf{x_3}$ par $\mathbf{x_3} = 59 - 10\mathbf{x_1} - 12\mathbf{x_2}$ dans le tableau T1

On la remplace dans la coupe : $-10\mathbf{x_1} - 10\mathbf{x_2} \leq -50$

On obtient la contrainte dans la base $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$: $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \leq 5$

<u>2ème coupe</u> : $\mathbf{x_3} + \mathbf{x_4} \geq 1$

En éliminant $\begin{cases} \mathbf{x_4} = -9 + 2\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} \text{ dans T3} \\ \mathbf{x_3} = 59 - 10\mathbf{x_1} - 12\mathbf{x_2} \text{ dans T1} \end{cases}$

On les remplace dans la coupe : $\mathbf{x_3} + \mathbf{x_4} = 109 - 20\mathbf{x_1} - 20\mathbf{x_2}$

On obtient la contrainte dans la base $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$: $10\mathbf{x_1} + 11\mathbf{x_2} \leq 54$

EXEMPLES DE PL EN NOMBRES ENTIERS

- **PROBLÈME DU SAC A DOS**
- **PROBLÈME D'ALLOCATION DE RESSOURCES**
- **PROBLÈME DE RECOUVREMENT**
- **PROBLÈME DE TRANSPORT**