École Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Optimisation Linéaire

ING1 Groupe B1 - **Babillon Damien - Elias Harrous - Nicolas Lorin**
27 février 2013
Traveaux Dirigés
Encadré par Marietta Manolessou, mm@eisti.eu

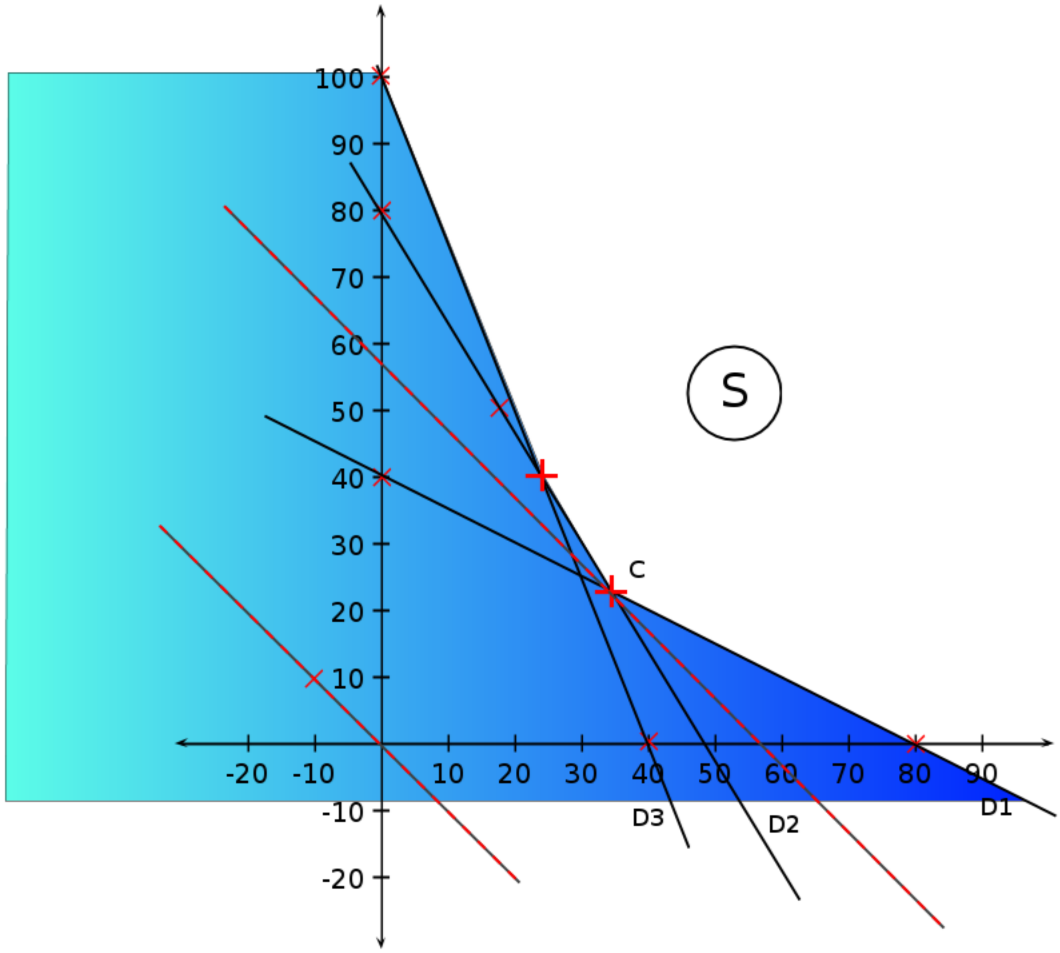
Une compagnie américaine possède deux mines d'or, A et B, dont les productions journalières sont données par le tableau suivant (unité : 1 tonne).

Qualité	Mine A	Mine B
Haute	1	2
Moyenne	3	2
Basse	5	2

La compagnie a besoin de : 80 tonnes d'or de haute qualité, 160 tonnes d'or de qualité moyenne et 200 tonnes d'or de basse qualité. Les entrepreneurs de la compagnie, s'interrogent sur le nombre de jours que chacune des mines doit fonctionner, si le coût journalier de la production est de 200 dollars pour la mine A et de 200 dollars pour la mine B.

i. Formaliser mathématiquement ce problème d'optimisation. Donner la solution du primal en programmation linéaire par la méthode géométrique. Interpréter votre résultat.

$$\left|\begin{array}{lllll}
\min(z = 200x + 200y) & D \ : \ 200x + 200y = 0 & (0,\ 0) & (-10,\ 10) \\
x + 2y \geqslant 80 & D_1 \ : \ x + 2y = 80 & (0,\ 40) & (80,\ 0) \\
3x + 2y \geqslant 160 & D_2 \ : \ 3x + 2y = 160 & (0,\ 80) & (20,\ 50) \\
5x + 2y \geqslant 200 & D_3 \ : \ 5x + 2y = 200 & (0,\ 100) & (40,\ 0)
\end{array}\right.$$



On obtient le minimum en $C = D_1 \bigcap D_2$:

$$\begin{cases} x + 2y &= 80 \\ 3x + 2y &= 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* &= 40 \\ y^* &= 20 \\ z^* &= 12000 \end{cases}$$

ii. Etablir le premier tableau de la méthode du simplexe, ayant une base réalisable. Résoudre le problème des mines d'or par la méthode des pénalités.
forme standard :

$$\begin{cases} \min(z = 200x + 200y) \\ x + 2y - x_3 = 80 \Leftrightarrow x_1^a \\ 3x + 2y - x_4 = 160 \Leftrightarrow x_2^a \\ 5x + 2y - x_5 = 200 \Leftrightarrow x_3^a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - x_3 + x_1^a = 80 \\ 3x + 2y - x_4 + x_2^a = 160 \\ 5x + 2y - x_5 + x_3^a = 200 \end{cases}$$

Soit $M >>>$. On injecte dans le système :

$$\begin{cases} \min(z = 200x + 200y + M(x_1^a + x_2^a + x_3^a)) \\ x_1^a = 80 - x - 2y + x_3 \\ x_2^a = 160 - 3x - 2y + x_4 \\ x_3^a = 200 - 5x - 2y + x_5 \end{cases} \Rightarrow x_1^a + x_2^a + x_3^a = 440 - 9x - 6y +$$

$x_3 + x_4 + x_5 \Rightarrow \min(\widetilde{z_M} = -(9M-200)x - (6M-200)y + Mx_3 + Mx_4 + Mx_5 + 440M)$

On déduit le premier tableau du sipmplexe par méthode des pénalités :

x	y	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a	$\widetilde{z_M}$	SM
$-(9M-200)$	$-(6M-200)$	M	M	M	0	0	0	-1	$-440M$
1	2	-1	0	0	1	0	0	0	80
3	2	0	-1	0	0	1	0	0	160
$\boxed{5}$	2	0	0	-1	0	0	1	0	200

$B_0(x_1^a,\ x_2^a,\ x_3^a)$ est une base réalisable mais pas optimale car $\bar{c}_1 < c_2 < 0$. On effectue un changement de base :
variable entrante :
$\bar{c}_1 < c_2 < 0 \Rightarrow x$ est la variable entrante.
variable sortante :

$$\begin{cases} 3\theta + x_2^a = 160 \\ 1\theta + x_1^a = 80 \\ 5\theta + x_3^a = 200 \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta} = \min\{\tfrac{80}{1},\ \tfrac{160}{3},\ \tfrac{200}{5}\} = 40 \Rightarrow x_3^a \text{ est la variable sortante.}$$

Par transformation par rapport au pivot on obtient le nouveau tableau du simplexe :

x	y	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a	$\widetilde{z_M}$	SM
0	$\frac{-12}{5}M + 120$	M	M	$\frac{-4}{5}M + 40$	0	0	$\frac{9}{5}M - 40$	-1	$-80M - 8000$
0	$\boxed{8/5}$	-1	0	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{-1}{5}$	0	40
0	$\frac{4}{5}$	0	-1	$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{-3}{5}$	0	40
1	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{-1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	40

$B_1(x_1^a,\ x_2^a,\ x)$ est une base réalisable mais pas optimale car $c_2 < c_5 < 0$. On effectue un changement de base :
variable entrante :
$c_2 < c_5 < 0 \Rightarrow y$ est la variable entrante.
variable sortante :

$$\begin{cases} \frac{8}{5}\theta + x_1^a = 40 \\ \frac{4}{5}\theta + x_2^a = 40 \\ \frac{2}{5}\theta + x_3^a = 40 \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta} = \min\{25,\ 50,\ 100\} = 25 \Rightarrow x_1^a \text{ est la variable sortante.}$$

Par transformation par rapport au pivot on obtient le nouveau tableau du simplexe :

x	y	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a	$\widetilde{z_M}$	SM
0	0	$\frac{-1}{2}M+75$	M	$\frac{-1}{2}M+25$	$\frac{3}{2}M-75$	0	$\frac{3}{2}M-25$	-1	$-20M-11.000$
0	1	$\frac{-8}{5}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{-1}{8}$	0	25
0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\boxed{1/2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	20
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	30

$B_2(y,\ x_2^a,\ x)$ est une base réalisable mais pas optimale car $c_5 < 0$. On effectue un changement de base :
variable entrante :
$c_5 < 0 \Rightarrow x_5$ est la variable entrante.
variable sortante :

$$\begin{cases} \frac{1}{8}\theta + y = 25 \\ \frac{1}{2}\theta + x_2^a = 20 \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta} = \min\{200,\ 40\} = 40 \Rightarrow x_2^a \text{ est la variable sortante.}$$

Par transformation par rapport au pivot on obtient le nouveau tableau du simplexe :

x	y	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a	$\widetilde{z_M}$	SM
0	0	50	50	0	$M-50$	$M-50$	M	-1	-12.000
0	1	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	0	20
0	0	1	-2	1	-1	2	-1	0	40
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	0	40

$B_0(x,\ y,\ x_5)$ est une base réalisable et optimale.

$$\begin{cases} x^* = 40 \\ y^* = 20 \\ x_5^* = 40 \end{cases} \Rightarrow z^* = 12.000$$

iii. Etablir le problème dual du i). Résoudre ce nouveau problème par l'algorithme du simplexe.

Rappel : tableau des correspondances

Primal (P)	Dual (D)
$\min(Z = cx)$	$\max(W = ub)$
$Ax = bx > 0$	$(uA)^T \leqslant c^T$
$A=$ matrice des contraintes	A^T(transp. de A) matr. des contr.
Contrainte $i :\geqslant$	Variable $u_i \geqslant 0$
Contrainte $i :=$	Variable $u_i \gtrless 0$
Contrainte $i :\leqslant$	Variable $u_i \leqslant 0$
Variable $x_j \geqslant 0$	Contrainte $j :\leqslant$
Variable $x_j \gtrless 0$	Contrainte $j :=$

Primal	Dual
$\min(z = 200x + 200y)$	$\max\{w = 80u_1 + 160u_2 + 200u_3\}$
$x + 2y \geqslant 80 \quad (\Leftrightarrow u_1)$	$u_1 + 3u_2 + 5u_3 \leqslant 200 \quad (\Leftrightarrow x)$
$3x + 2y \geqslant 160 \quad (\Leftrightarrow u_2)$	$2u_1 + 2u_2 + 2u_3 \leqslant 200 \quad (\Leftrightarrow y)$
$5x + 2y \geqslant 200 \quad (\Leftrightarrow u_3)$	$u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ u_3 \geqslant 0$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$	

Résolution du Dual (formalisé) :

$$\begin{cases} \min\{z = -w = 80u_1 + 160u_2 + 200u_3\} \\ u_1 + 3u_2 + 5u_3 + x \leqslant 200 \\ 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + y \leqslant 200 \end{cases}$$

Premier tableau du simplexe :

u_1	u_2	u_3	x	y	w	SM
-80	-160	-200	0	0	1	0
1	3	$\boxed{5}$	1	0	0	200
2	2	2	0	1	0	200

$B_0(x,\ y)$ est une base réalisable mais pas optimale car $c_3 < c_2 < c_1 < 0$.
Changement de base :
variable entrante : u_3
variable sortante :

$$\begin{cases} 5\theta + x = 200 \\ 2\theta + y = 200 \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta} = \min\{\tfrac{200}{5},\ \tfrac{200}{2}\} = 40 \Rightarrow x \text{ est la variable sortante.}$$

Nouveau tableau du simplexe :

u_1	u_2	u_3	x	y	w	SM
-40	-40	0	40	0	1	8000
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	40
$\boxed{8/5}$	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{-2}{5}$	1	0	120

$B_1(u_3,\ y)$ est une base réalisable mais pas optimale car $c_2 = c_1 < 0$.
Changement de base :
variable entrante : u_1
variable sortante :

$$\begin{cases} \frac{\theta}{5} + u_3 = 40 \\ \frac{8\theta}{5} + y = 120 \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta} = \min\{40 \times 5,\ 120 \times \tfrac{5}{8}\} = 75 \Rightarrow y \text{ est la variable sortante.}$$

Nouveau tableau du simplexe :

u_1	u_2	u_3	x	y	w	SM
0	-20	0	30	25	1	11.000
0	$\boxed{1/2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	0	25
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{5}{8}$	0	75

$B_2(u_3,\ u_1)$ est une base réalisable mais pas optimale car $u_2 < 0$.
Changement de base :
variable entrante : u_2
variable sortante : u_3

$$\begin{cases} \frac{\theta}{2} + u_3 = 25 \\ \frac{\theta}{2} + u_1 = 75 \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta} = \min\{25 \times 2,\ 75 \times 2\} = 50 \Rightarrow u_3 \text{ est la variable sortante.}$$

Nouveau tableau du simplexe :

u_1	u_2	u_3	x	y	w	SM
0	0	40	40	20	1	12.000
0	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	50
1	0	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	50

$B_3(u_1,\ u_2)$ est une base réalisable et optimale.
$\max\{w\} = 12.000$ pour $u_1 = u_2 = 50$.

iv. Comparer la solution du dual obtenue en iii. avec la solution du primal du i. Montrer la cohérence de vos résultats par application du théorème de dualité et du principe de complémentarité. Comment pourrait-on obtenir la solution du primal directement par la procédure détaillée faite dans le dual ? Justifier votre réponse.

Par le théorème de Dualité on a : $z^* = w^* = 12.000$
Théorème de complémentarité :

Solution du Primal	Solution du Dual
$x^* = 40 > 0$	$u_1^* + 3u_2^* + 5u_3^* = 200$ contrainte saturée
$y^* = 20 > 0$	$2u_1^* + 2u_2^* + 2u_3^* = 200$
3. $5 \times 40 + 2 \times 20 = 240 > 200$ non saturé $\Leftrightarrow$	$u_3^* = 0$
	$\Rightarrow u_1^* = u_2^* = 50$