**E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**
**1re Année Ingénieurs**
**Optimisation Linéaire T.D.8**
le 27 mars 2012

**Révisions : Méthode Géometrique ; méthode des tableaux du Simplexe ; méthode des Pénalités ; méthode de Dualité**
**Programmation en nombres entiers (Méthodes des coupes ou des congruences décroissantes)**

# 1

1). Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode géometrique du simplexe :

$$\textbf{(P.1)} \qquad \max_{x_1;x_2}\{Z = -3x_1 + x_2\} \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} -4x_1 + 10x_2 \leq 25, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

2). Etablir le problème dual du problème précédent.
(voir tableau des correspondances)

- i) Montrer pourquoi l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début. Utiliser la **méthode des pénalités** pour établir **un premier tableau** de base réalisable.
- ii) Trouver la solution de ce problème Dual, en utilisant le théorème de **Dualité** et les **deux formes du principe de complémentarité** Commenter vos résultats.

**Tableau des correspondances**

| **Primal (P)** | **Dual (D)** |
|---|---|
| Fonction Obj. (min) | Second membre |
| Second membre | Fonction Obj. (max) |
| $A$= matrice des contraintes | $A^T$ matrice des contraintes |
| Contrainte $i : \leq \ (i : \geq)$ | Variable $u_i \leq 0 \ (u_i : \geq 0)$ |
| Contrainte $i : =$ | Variable $u_i \gtrless 0$ |
| Variable $x_j \geq 0$ | Contrainte $j : \leq$ |
| Variable $x_j \gtrless 0$ | Contrainte $j : =$ |

## 2 Programmation en Nombres Entiers

On considère le problème suivant :

$$\textbf{(P.2)} \qquad \max_{x_1;x_2}\{Z = -3x_1 + x_2\}$$
$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} -4x_1 + 10x_2 \leq 25, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbf{N}. \end{array} \right\}$$

Par la méthode des tableaux du "simplexe", on obtient comme dernier tableau qui fournit la solution optimale du problème **(P.1)**, le tableau suivant : (Comparer ce résultat avec votre solution géometrique du 1.))

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $W$ | s.m |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 26/10 | 0 | 1/10 | 0 | 0 | -1 | 25/10 |
| -4/10 | 1 | 1/10 | 0 | 0 | 0 | 25/10 |
| 24/10 | 0 | -1/10 | 1 | 0 | 0 | 75/10 |
| 16/10 | 0 | 1/10 | 0 | 1 | 0 | 85/10 |

1. Cette solution serait-elle une solution optimale pour le problème **(P.2)** ?
2. En exigeant **que** $x_2$ **soit entier** trouver deux nouveaux tableaux du simplexe (application de la méthode des **coupes**) qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ? Attention ! : **Se limiter seulement à une coupe.**

   ii) Porter sur le graphique de votre solution géometrique du 1) (sur le plan $(x_1, x_2)$ ) la contrainte correspondant à la coupe engendrée par l'algorithme, (après élimination des variables d'écart).
   Comparer votre nouveau domaine de solutions avec celui du 1), et trouver le sommet du simplexe correspondant à l'optimum pour $x_1$ entier.

## 3 Modélisation

Les besoins minimaux en vitamines d'une personne soucieuse de sa bonne santé sont de : 7 unités de vitamine A, 5 unités de vitamine C et 2 unités de vitamine D.

Les commerces proposent deux produits pouvant répondre à ces besoins :

- La marque 1, qui coûte 4 euros, apporte 2 unités de vitamine A, 3 de vitamine C et 3 de vitamine D.
- La marque 2, qui coûte 2 euros, apporte 4 unités de vitamine A, 1 de vitamine C et 5 de vitamine D.

On souhaite connaître la combinaison la moins coûteuse de ces deux marques qui répond aux besoins.

1) Formaliser le problème. S'agit-il d'un problème de programmation linéaire ? Justifier votre réponse.

2) Peut-on envisager une résolution graphique de ce problème ? Si oui, effectuer cette résolution. ■

# Optimisation linéaire TD8

**Ex1:** 1) $\max_{x_1, x_2} \{ Z = -3x_1 + x_2 \}$

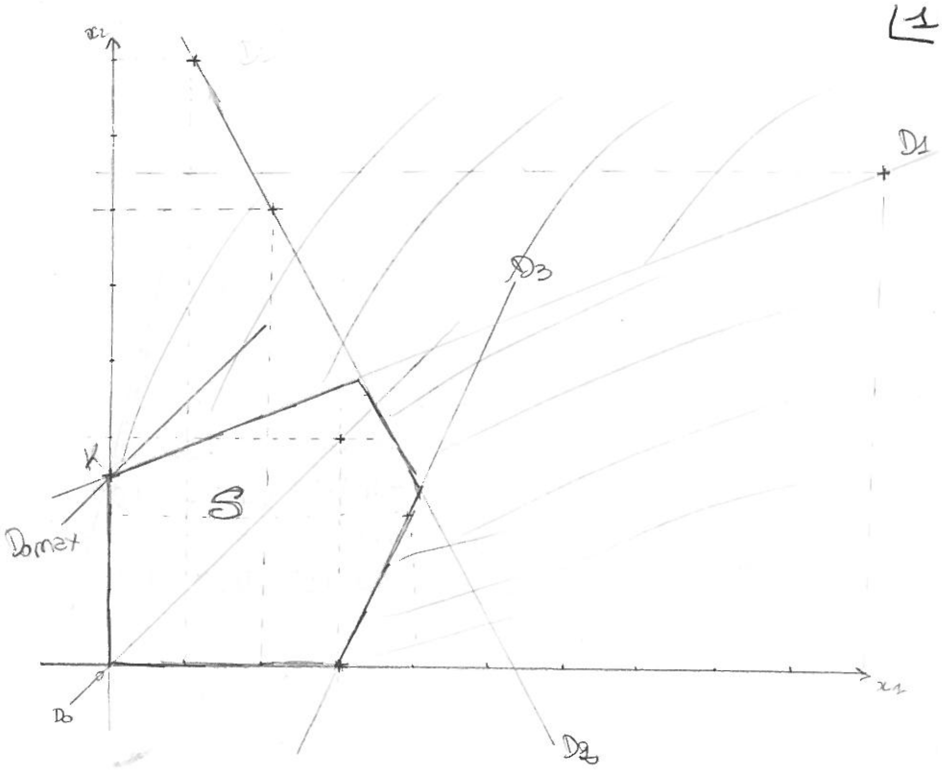
avec : $\begin{cases} -4x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

($D_0$) : $x_2 = 3x_1$

($D_1$) : $x_2 \leq \frac{25 + 4x_1}{10} = 2,5 + 0,4x_1$

($D_2$) $x_2 \leq 10 - 2x_1$

($D_3$) $x_2 \geq -6 + 2x_1$




$K = D_1 \cap Ox_2$

$\begin{cases} -4x_1 + 10x_2 = 25 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 2,5 \end{cases}$ Donc $Z_{max} = 2,5$

2)

| Primal | Dual |
|---|---|
| $\max(Z = -3x_1 + x_2)$ | $\min(w = 25u_1 + 10u_2 + 6u_3)$ |
| avec $\begin{cases} -4x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} -4u_1 + 2u_2 + 2u_3 \geq -3 \\ 10u_1 + u_2 - u_3 \geq 1 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases}$ |

i) Forme standard : $\min(w = 25u_1 + 10u_2 + 6u_3)$

avec : $\begin{cases} -4u_1 + 2u_2 + 2u_3 - u_4 = -3 \\ 10u_1 + u_2 - u_3 - u_5 = 1 \end{cases}$

| $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $w$. | S.m. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 10 | 6 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| -4 | 2 | 2 | -1 | 0 | 0 | -3 |
| 10 | 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 |

On n'a pas une base réalisable car $u_5 = -1$ donc on ne peut pas appliquer la méthode du simplexe.

on annule $u_1, u_2, u_3$ les variables initiales :
$-u_4 = -3 \Rightarrow$ ok
$-u_5 = 1 \Rightarrow$ NON
donc on ajoute une variable artificielle.

Méthode de pénalités : $\min(w = 25u_1 + 10u_2 + 6u_3 + M \cdot u_1^a)$.

avec : $\begin{cases} -4u_1 + 2u_2 + 2u_3 - u_4 = -3 & ① \\ 10u_1 + u_2 - u_3 - u_5 + u_1^a = 1 & ② \\ u_i \geq 0 \text{ avec } i = 1..5 \text{ et } u_1^a \geq 0 & ③ \end{cases}$

② $\Rightarrow u_1^a = 1 - 10u_1 - u_2 + u_3 + u_5 \quad \Rightarrow \min(w = 25u_1 + 10u_2 + 6u_3 + M(1 - 10u_1 - u_2 + u_3 + u_5))$

1er tableau du simplexe :

| $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_1^a$ | $w$ | s.m. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $25-10M$ | $10-M$ | $6+M$ | 0 | $M$ | 0 | $-1$ | $-M$ |
| 4 | $-2$ | $-2$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 10 | 1 | $-1$ | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 1 |

Primal | Dual

ii) Principe de complémentarité :

on connait la solution du primal à l'aide de la méthode géométrique donc on cherche la solution du dual.

$x_1^* = 0 \Longrightarrow$ contrainte non saturé : $-4u_1^* + 2u_2^* + 2u_3^* > -3$

$x_2^* = 2{,}5 \Longrightarrow$ contrainte saturé : $10u_1^* + u_2^* - u_3^* = 1$

méthode géom.

$u_1^* = \frac{1}{10}$

1ère contrainte :

$-4\times 0 + 10\times 2{,}5 = 25$ (saturé) $\Longrightarrow u_1^* > 0$

2e contrainte :

$2\times 0 + 2{,}5 < 10$ (non s) $\Longrightarrow u_2^* = 0$

3e contrainte :

$2\times 0 - 2{,}5 < 6$ (non s) $\Longrightarrow u_3^* = 0$

Ainsi la solution du problème dual est :

$$\begin{cases} u_1^* = \frac{1}{10} \\ u_2^* = 0 \\ u_3^* = 0 \end{cases} \text{ et } w^* = 25\times\frac{1}{10} + 10\times 0 + 6\times 0 = 2{,}5$$

Ex 3 :

$x_1$ : quantité de marque 1

$x_2$ : quantité de marque 2

Fct. obj. ... et contrainte aussi

↳ pb. de prog. linéaire

$$\min(Z = 4x_1 + 2x_2)$$

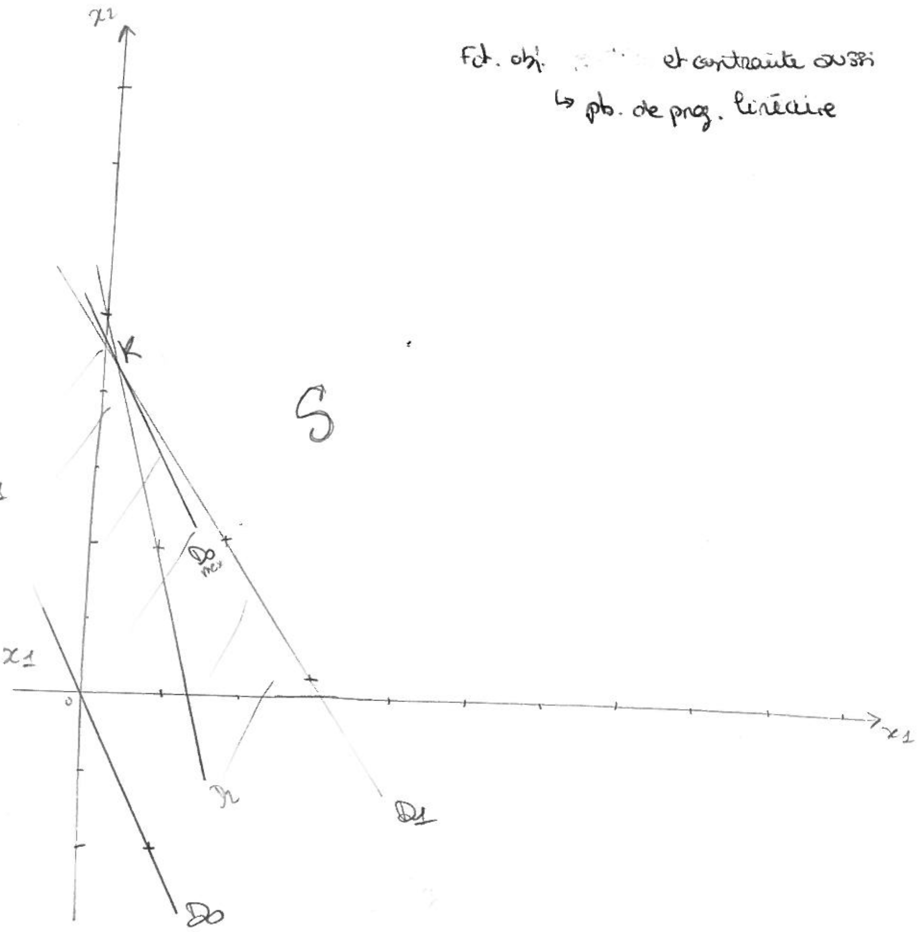
avec : $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 7 \\ 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$

$(D_0)$ $\quad -\frac{4x_1}{2} = x_2 = -2x_1$

$(D_1)$ $\quad x_2 \geq \frac{7-2x_1}{4} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}x_1$

$(D_2)$ $\quad x_2 \geq 5 - 3x_1$

$(D_3)$ $\quad x_2 \geq \frac{2-3x_1}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}x_1$




$\cdot\ K = D_1 \cap D_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 7 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 13/10 \\ x_2^* = 11/10 \end{cases}$$

$$Z_{min} = 4\cdot\frac{13}{10} + 2\cdot\frac{11}{10}$$

Ex 2 : $\max_{x_1, x_2} \{ Z = -3x_1 + x_2 \}$

avec : $\begin{cases} -4x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) La solution n'est pas optimale car :

$$x_2^* = \frac{25}{10} \notin \mathbb{N}.$$

2) i) On veut que $x_2$ soit entier : voir tableau ligne $x_2$

$$-\frac{4}{10}x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_3 = \frac{25}{10}$$

$$\Rightarrow -4x_1 + 10x_2 + x_3 = 25$$

$$\Rightarrow 10x_2 = 25 + 4x_1 - x_3$$

Si $x_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ donc le 2e membre est un entier et un multiple de 10 :

$$\Rightarrow 25 + 4x_1 - x_3 \equiv 0 [10]$$

$$\Rightarrow -4x_1 + x_3 \equiv 25 [10]$$

$$\Rightarrow 6x_1 + x_3 \equiv 5 [10]$$

La meilleur coupe est : $6x_1 + x_3 \geq 5$.

d'où : $6x_1 + x_3 - x_6 = 5$ une nouvelle contrainte positive

$$\Rightarrow -6x_1 - x_3 + x_6 = -5$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $w$ | s.m | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26/10 | 0 | 4/10 | 0 | 0 | 0 | $\boxed{-1}$ | 25/10 | L1 |
| -4/10 | 1 | 1/10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25/10 | L2 |
| 24/10 | 0 | -1/10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 75/10 | L3 |
| 16/10 | 0 | 4/10 | 0 | 1 | 0 | 0 | 85/10 | L4 |
| -6 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -5 | L5 |

Variable sortante : $x_6$ ($\Rightarrow -5$ negatif)

Variable entrante :

$$\min \left( \frac{-\frac{26}{10}}{-6} ; \frac{-\frac{1}{10}}{-1} \right) = \frac{1}{10} \Rightarrow \text{var. ent. } x_3$$

Pivot : -1

$L_5' \leftarrow \frac{L_5}{-1}$ ligne du pivot

$L_1' \leftarrow \frac{1}{10} . L_5 + L_1$

$L_2' \leftarrow \frac{1}{10} L_5 + L_2$

$L_3' \leftarrow -\frac{1}{10} L_5 + L_3$

$L_4' \leftarrow \frac{1}{10} L_5 + L_4$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $w$ | s.m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1'$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/10 | -1 | 2 |
| $L_2'$ | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/10 | 0 | 2 |
| $L_3'$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1/10 | 0 | 8 |
| $L_4'$ | 2,2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1/10 | 0 | 9 |
| $L_5'$ | 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | - 1 | 0 | 5 |

A verifier

Solution : $x_1^* = 0$ → h. base

$x_2^* = 2$

$x_3^* = 5$

$x_4^* = 8$

$x_5^* = 9$

$x_6^* = 0$ → h. base

et $w^* = 2$

on reporte dans le graphique → on obtient un nouveau K'.

$K' = D \cap Ox_2$

ii) Ajout de la "meilleure coupe" sur le graphique : pour la reporter il faut se débarrasser de la contrainte au prop' $x_3$.

On sait que :

(2e ligne = plus simple → tableau du simplexe)

$$-\frac{4}{10}x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_3 = \frac{25}{10}$$

$$\Rightarrow -4x_1 + 10x_2 + x_3 = 25$$

$$\Rightarrow x_3 = 25 + 4x_1 - 10x_2$$

On reporte dans l'équation de la coupe :

$$6x_1 + 25 + 4x_1 - 10x_2 \geq 5$$

$$\Rightarrow 10x_1 - 10x_2 \geq -20$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 \leq 2$$

On a D : $x_2 - x_1 = 2$