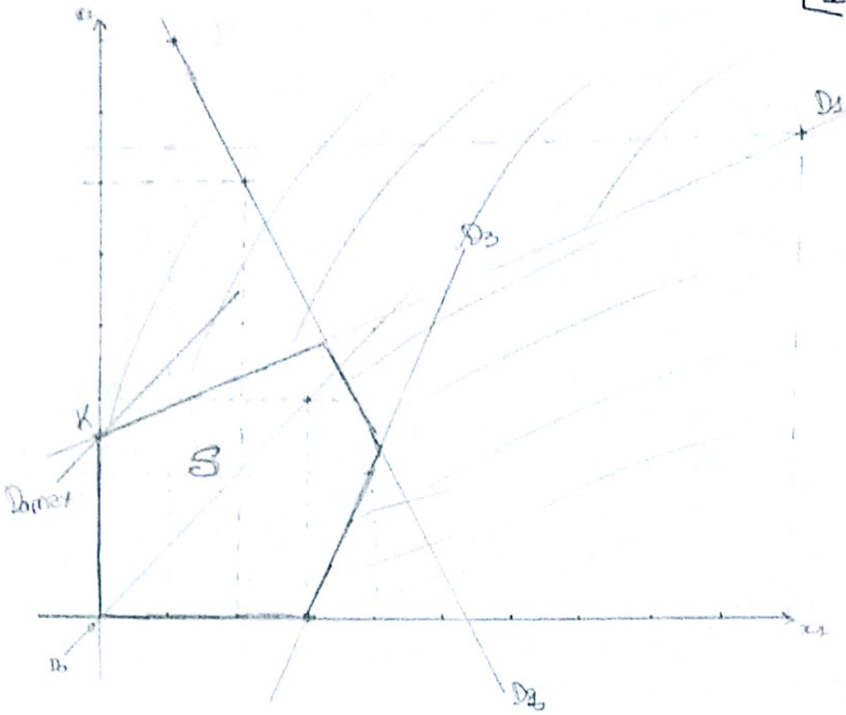
Optimisation Linéaire TD8

Ex1: 1) $\max_{x_1, x_2} \{ Z = -3x_1 + x_2 \}$

avec : $\left\{ \begin{array}{l} -4x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$



(D_0) $x_2 = 3x_1$

(D_1) $x_2 = \frac{25+4x_1}{10} = 2,5 + 0,4x_1$

(D_2) $x_2 \leq 10 - 2x_1$

(D_3) $x_2 \geq -6 + 2x_1$

$K = D_1 \cap Ox_2$

$\left\{ \begin{array}{l} -4x_1 + 10x_2 = 25 \\ x_1 = 0 \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 2,5 \end{array} \right.$ Donc $Z_{max} = 2,5$

2)

Primal

$\max(Z = -3x_1 + x_2)$

avec $\left\{ \begin{array}{l} -4x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 ;\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$

Dual

$\min(W = 25U_1 + 10U_2 + 6U_3)$

$\left\{ \begin{array}{l} -4U_1 + 2U_2 + 2U_3 \geq -3 \\ 10U_1 + U_2 - U_3 \geq 1 \\ U_1, U_2, U_3 \geq 0 \end{array} \right.$

1) Forme standard : $\min(w = 25U_1 + 10U_2 + 6U_3)$

avec : $\left\{ \begin{array}{l} -4U_1 + 2U_2 + 2U_3 - U_4 = -3 \\ 10U_1 + U_2 - U_3 - U_5 = 1 \end{array} \right.$

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	W.	S.M.
25	10	6	0	0	-1	0
-4	2	2	-1	0	0	-3
10	1	-1	0	-1	0	1

On n'a pas une base réalisable car $U_5 = -1$ donc on ne peut pas appliquer la méthode du simplexe.

on annule U_1, U_2, U_3
les variables initiales :
$-U_4 = -3 \Rightarrow$ OK
$-U_5 = 1 \Rightarrow$ NON
donc on ajoute une variable artificielle.

Méthode de pénalités : $\min(w = 25U_1 + 10U_2 + 6U_3 + M \cdot U_1^a)$

avec : $\left\{ \begin{array}{ll} -4U_1 + 2U_2 + 2U_3 - U_4 = -3 & ① \\ 10U_1 + U_2 - U_3 - U_5 + U_1^a = 1 & ② \\ U_i \geq 0 \text{ avec } i = 1..5 \text{ et } U_1^a \geq 0 & ③ \end{array} \right.$

② $\Rightarrow U_1^a = 1 - 10U_1 - U_2 + U_3 + U_5$ $\Rightarrow \min(w = 25U_1 + 10U_2 + 6U_3 + M(1 - 10U_1 - U_2 + U_3 + U_5))$

1er tableau du simplexe :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_1^a	w	s.m.
$25-10M$	$10-M$	$6+M$	0	M	0	-1	$-M$
4	-2	-2	1	0	0	0	3
10	1	-1	0	-1	1	0	1

on connait la solution du primal à l'aide de la méthode géométrique donc on cherche la solution du dual.

ii) Principe de complémentarité : Primal ; Dual

$x_1^* = 0 \Longrightarrow$ contrainte non saturée : $-4u_1^* + 2u_2^* + 2u_3^* > -3$

$x_2^* = 2,5 \Longrightarrow$ contrainte saturé : $10u_1^* + u_2^* - u_3^* = 1 \Rightarrow u_1^* = \frac{1}{10}$

méthode géom

1ère contrainte :

$-4\times 0 + 10\times 2,5 = 2,5$ saturé $\Longrightarrow u_1^* > 0$

2e contrainte :

$2\times 0 + 2,5 < 10$ non s $\Longrightarrow u_2^* = 0$

3e contrainte :

$2\times 0 - 2,5 < 6$ non s $\Longrightarrow u_3^* = 0$

Ainsi la solution du problème dual est :

$$\begin{cases} u_1^* = \frac{1}{10} \\ u_2^* = 0 \\ u_3^* = 0 \end{cases} \quad \text{et } w^* = 25\times\frac{1}{10} + 10\times 0 + 6\times 0 = 2,5$$

Ex3 :

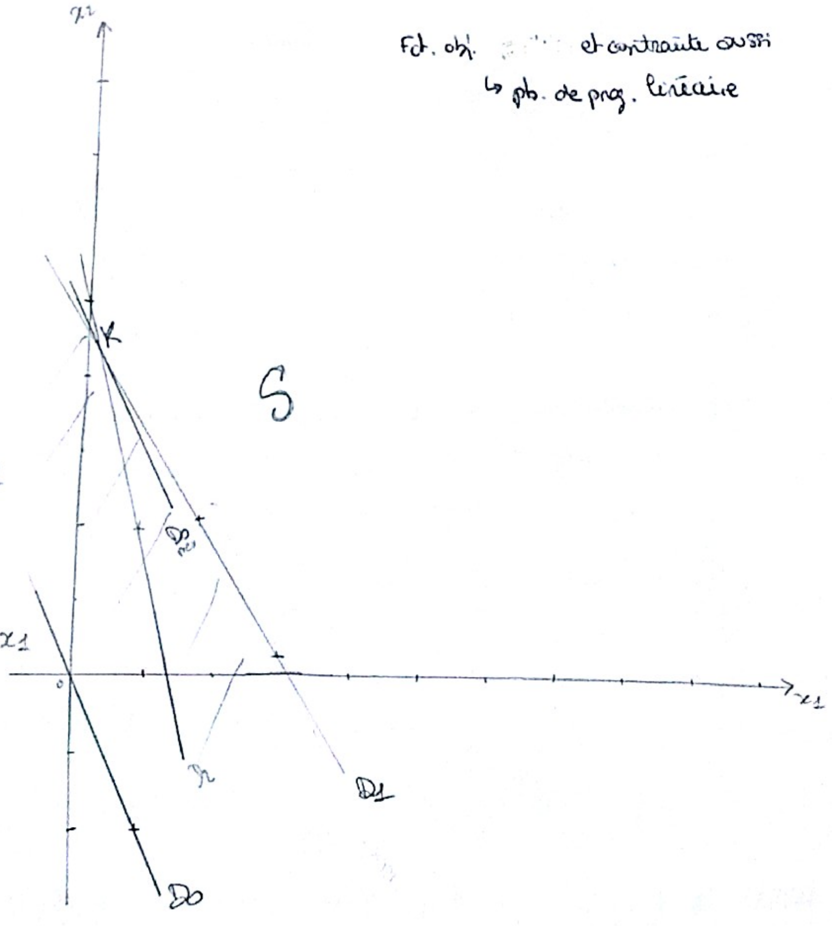
x_1 : quantité de marque 1

x_2 : quantité de marque 2

Fct. obj. et contrainte aussi ↳ pb. de prog. linéaire

$$\min(z = 4x_1 + 2x_2)$$

avec :
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 7 \\ 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$



(D_0) $\frac{-4x_1}{2} = x_2 = -2x_1$

(D_1) $x_2 \geq \frac{7-2x_1}{4} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}x_1$

(D_2) $x_2 \geq 5 - 3x_1$

(D_3) $x_2 \geq \frac{2-3x_1}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}x_1$

$K = D_1 \cap D_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 7 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 13/10 \\ x_2^* = 11/10 \end{cases}$$

$$Z_{min} = 4.\frac{13}{10} + 2.\frac{11}{10}$$

Ex2 : $\max_{x_1, x_2} \{ Z = -3x_1 + x_2 \}$

avec : $\begin{cases} -4x_1 + 10x_2 \le 25 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) La solution n'est pas optimale car :

$$x_2^* = \frac{25}{10} \notin \mathbb{N}.$$

2) i) On veut que x_2 soit entier : voir tableau ligne x_2

$$-\frac{4}{10}x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_3 = \frac{25}{10}$$

$$\Rightarrow -4x_1 + 10x_2 + x_3 = 25$$

$$\Rightarrow 10x_2 = 25 + 4x_1 - x_3$$

Si $x_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ donc le 2e membre est un entier et un multiple de 10 :

$$\Rightarrow 25 + 4x_1 - x_3 \equiv 0\,[10]$$

$$\Rightarrow -4x_1 + x_3 \equiv 25\,[10]$$

$$\Rightarrow 6x_1 + x_3 \equiv 5\,[10]$$

La meilleure coupe est : $6x_1 + x_3 \geq 5$.

d'où : $6x_1 + x_3 - x_6 = 5$ nouvelle variable d'écart positive

$$\Rightarrow -6x_1 - x_3 + x_6 = -5$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w	s.m	
26/10	0	4/10	0	0	0	-1	25/10	L1
-4/10	1	1/10	0	0	0	0	25/10	L2
24/10	0	-1/10	1	0	0	0	75/10	L3
16/10	0	1/10	0	1	0	0	85/10	L4
-6	0	-1	0	0	1	0	-5	L5

Variable sortante : x_6 ($\Rightarrow$ -5 négatif)

Variable entrante :

$$\min\left(\frac{-\frac{26}{10}}{-6} ; \frac{-\frac{1}{10}}{-1} \right) = \frac{1}{10} \Rightarrow \text{var. ent. } x_3$$

Pivot : -1

Après le pivot :

$$L_5' \leftarrow \frac{L_5}{-1}$$

$$L_1' \leftarrow \frac{1}{10} . L_5 + L_1$$

$$L_2' \leftarrow \frac{1}{10} L_5 + L_2$$

$$L_3' \leftarrow -\frac{1}{10} L_5 + L_3$$

$$L_4' \leftarrow \frac{1}{10} L_5 + L_4$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w	s.m
L_1'	2	0	0	0	0	4/10	-1	2
L_2'	-1	1	0	0	0	1/10	0	2
L_3'	3	0	0	1	0	-1/10	0	8
L_4'	2,2	0	0	0	1	1/10	0	9
L_5'	6	0	1	0	0	-1	0	5

A vérifier

Solution :

$x_1^* = 0$ → h base

$x_2^* = 2$

$x_3^* = 5$

$x_4^* = 8$

$x_5^* = 9$

$x_6^* = 0$ → h base

et $w^* = 2$

ii) Ajout de la "meilleure coupe" sur le graphique : pour la reporter il faut se débarasser de la contrainte au sup' x_3.

On sait que : (2e ligne = plus simple → tableau du simplexe)

$$-\frac{4}{10}x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_3 = \frac{25}{10}$$

$$\Rightarrow -4x_1 + 10x_2 + x_3 = 25$$

$$\Rightarrow x_3 = 25 + 4x_1 - 10x_2$$

On reporte dans l'équation de la coupe :

$$6x_1 + 25 + 4x_1 - 10x_2 \geq 5$$

$$\Rightarrow 10x_1 - 10x_2 \geq -20$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 \le 2$$

On pose D : $x_2 - x_1 = 2$

on reporte dans le graphique → on obtient un nouveau K'.

$$K' = D \cap Ox_2$$