TD 7 Programmation linéaire en nombres binaires

Exercice 1 : résoudre le problème en utilisant la méthode de Balas

$\min z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5$
$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 \geq 3$
$x_1 - x_2 + x_4 + 3x_5 \geq -1$
$-2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 \geq 4$
$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$

<u>Corrigé</u>

1. les $x_i = 0$ n'est pas solution les contrainte C_1 et C_3 ne sont pas vérifiées
2. Test d'admissibilité : si un des max $(Ai(X)) - bi < 0$ donc pas de solution
3. Test d'implication : Il faut avoir au moins sur une contrainte $\sup|aij| > \max(Ai(X)) - bi$

		max $(Ai(X)) - bi$	$\sup\lvert a_{ij}\rvert$
$\min z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5$			
$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 \geq 3$	C_1	8-3 = 5	≥ 4
$x_1 - x_2 + x_4 + 3x_5 \geq -1$	C_2	5 +1 = 6	≥ 3
$-2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 \geq 4$	C_3	8-4 = **4**	**< 5**
$x_i \in \{0, 1\}$			

La troisième contrainte impose $x_5 = 1$, pour cette contrainte max-b $\leq \sup|a_{ij}|$. On obtient ensuite le parcourt suivant :

$S_0 \longrightarrow x_5 = 1$

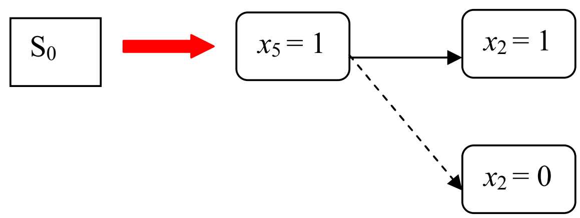
On reporte $x_5 = 1$ et on obtient le nouveau PL suivant :

		max $(Ai(X)) - bi$	$\sup\lvert a_{ij}\rvert$
$\min z - 3 = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4$			
$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \geq 2$	C_1	7-2 = 5	≥ 4
$x_1 - x_2 + x_4 \geq -4$	C_2	2+4 = 6	≥ 1
$-2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 \geq -1$	C_3	3+1 = 4	≥ 2
$x_i \in \{0, 1\}$			

1. Les $x_i = 0$ n'est pas solution les contrainte C_1 et C_3 ne sont pas vérifiées
2. Test d'admissibilité : si un des max $(Ai(X)) - bi < 0$ donc pas de solution
3. Tous les $\sup|aij| < \max(Ai(X)) - bi$ donc pas de test d'implication
4. Méthode de Balas (si j'ai un choix en plusieurs variables alors j'utilise le théorème de Faure)

	si $x_1 = 1$	si $x_2 = 1$	si $x_3 = 1$	si $x_4 = 1$
bi – Coeff de $x_i = 1$	1 -5 1	0 -3 -3	4 -4 -2	-2 -5 3
$\sum$ (Coeff. ≥ 0)	2	**0**	4	3

Le minimum est obtenu pour $x_2 = 1$ donc on fait une séparation/évaluation sur x_2



a) On commence toujours par $x_i = 1$ donc on prend $x_2 = 1$ et on le reporte dans le PL

$\min z - 7 = 2x_1 + 2x_3 + 2x_4$	
$x_1 - 2x_3 + 4x_4 \geq 0$	C_1
$x_1 + x_4 \geq -3$	C_2
$-2x_1 + x_3 - 4x_4 \geq -3$	C_3
$x_i \in \{0, 1\}$	

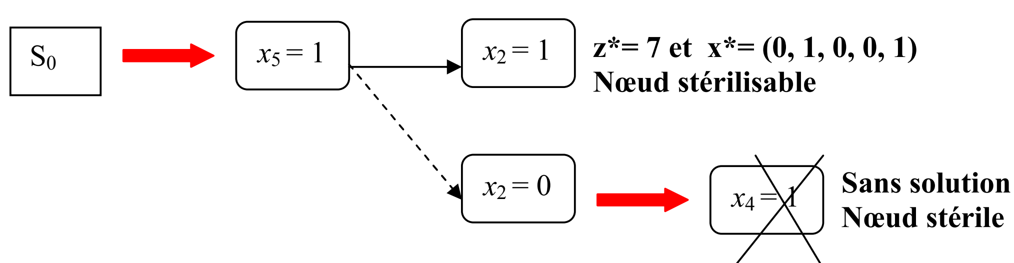
1. Les $x_i = 0$ est solution ($x_1 = x_3 = x_4 = 0$), la solution est :

b) On prend par $x_2 = 0$ et on le reporte dans le PL

		max (Ai(X)) – bi	sup|a$_{ij}$|
$\min z - 3 = 2x_1 + 2x_3 + 2x_4$			
$x_1 - 2x_3 + 4x_4 \geq 2$	C_1	5-2 = 3	$<$ 4
$x_1 + x_4 \geq -4$	C_2	2+4 = 6	$\geq$ 1
$-2x_1 + x_3 - 4x_4 \geq -1$	C_3	1+1 = 2	$<$ 4
$x_i \in \{0, 1\}$			

1. Les $x_i = 0$ n'est pas solution les contrainte C_1 et C_3 ne sont pas vérifiées
2. Test d'admissibilité : si un des max (Ai(X)) – bi $<$ 0 donc pas de solution
3. Test d'implication : Il faut avoir au moins sur une contrainte sup|aij| > max (Ai(X)) – bi

La première contrainte impose $x_4 = 1$, pour cette contrainte max-b $\leq$ sup|a$_{ij}$|. On obtient ensuite le parcourt suivant :



On reporte $x_4 = 1$ et on obtient le nouveau PL suivant :

		max (Ai(X)) – bi	|
$\min z - 5 = 2x_1 + 2x_3$			
$x_1 - 2x_3 \geq -2$	C_1	1+2 = 3	
$x_1 \geq -3$	C_2	1+3 = 4	
$-2x_1 + x_3 \geq +3$	C_3	1-3 = -2 $<$ 0	
$x_i \in \{0, 1\}$			

1. les $x_i = 0$ n'est pas solution les contrainte C_1 et C_3 ne sont pas vérifiées
2. Test d'admissibilité : si un des max (Ai(X)) – bi $<$ 0 donc pas de solution

Exercice 2 : PROBLEME D'AFFECTATION

On désire donner une affectation de tâches à des machines de manière à ce qu'une machine corresponde à une seule tâche et qu'une tâche corresponde à une seule machine.
On veut déterminer une telle affectation qui soit de coût minimum.
Les coûts sont donnés par une matrice de la forme suivante:

	T1	T2	T3	T4
M1	8	3	1	5
M2	11	7	1	6
M3	7	8	6	8
M4	11	8	4	9

Les valeurs données dans le tableau sont les coûts d'affectation des machines aux tâches. Par exemple si l'on affecte la machine 3 à la tâche 4, cela coûte 8 unités.

<u>Corrigé</u>

FORMULATION

Nous avons donc *xij* = 1 si la tâche i est réalisée par la machine j,
0 sinon
Le problème à résoudre est alors :

Minimizer z = $\sum_{i=1}^{n} \sum_{J=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \boldsymbol{j = 1,\ldots,n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \boldsymbol{i = 1,\ldots,n}$$

$x_{ij} \in \{0, 1\}$