E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

Optimisation Linéaire T.D.3
le 7 février 2012
(Introduction à la modélisation et la résolution géometrique des problèmes linéaires.
Initiation aux tableaux du simplexe, et la méthode des pénalités)

1

Un investisseur doit choisir parmi les 2 types d'actifs **Ilog** et **BNP-Paribas**. L'action **Ilog** a une espérance de gain de 80 Euros et l'action **BNP-Paribas** 60 euros.

L'investisseur ne peut acheter au total que 100 actions et compte dépenser au plus 800 Euros.

L'action **Ilog** coûte 5 Euros et l'action **BNP-Paribas** 10 Euros.

L'achat des actions se fait d'autre part via une banque qui touche une commission de 2 Euros par action de **Ilog** et 1 Euro par action **BNP-Paribas**. L'investisseur ne veut pas dépasser 150 Euros de commissions.

Combien d'actions de chaque type l'investisseur doit acheter pour maximiser ses revenus futurs ?

Modéliser et résoudre ce problème d'optimisation linéaire par la méthode géometrique et la méthode des tableaux du simplexe.

2

Pour les deux problèmes suivants montrer pourquoi l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début. En utilisant la méthode des pénalités établir le 1^{er} tableau du simplexe ayant une base réalisable :

i) (P.0.1)

$$\min(W = x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_1 \geq 0 \quad \forall\, i = 1,2,3 \end{array} \right\}$$

ii) (P.0.2)

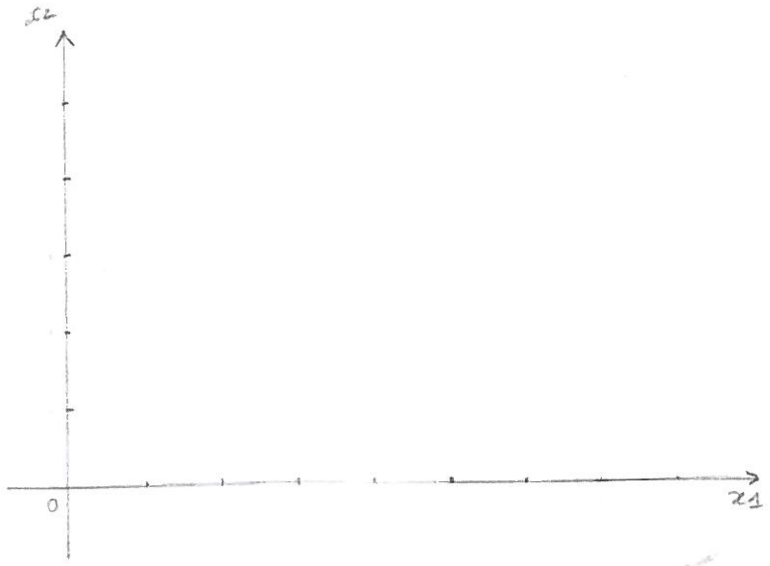
$$\min(Z = x_1 - 2x_2)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ x_1 \geq 0 \quad \forall\, i = 1,2 \end{array} \right\}$$

TD 3
OPTIMISATION LINÉAIRE

1| • x_1 actions de Ilog ; x_2 actions de BNP.

$\max(z = 80x_1 + 60x_2)$ avec les contraintes : $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 800 \\ 2x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$



D_0 : $x_2 = \frac{-80x_1}{60} = -\frac{4}{3}x_1$

D_1 : $\frac{800 - 5x_1}{10} = x_2 \Rightarrow x_2 = 80 - 0{,}5x_1$

D_2 : $x_2 = 150 - 2x_1$

D_3 = $x_2 = 100 - x_1$

• Forme standard : $\min(-z = w = -80x_1 - 60x_2)$

avec : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_5 = 800 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	s.m.
-80	-60	0	0	0	-1	0
1	1	1	0	0	0	100
$\boxed{2}$	1	0	1	0	0	150
5	10	0	0	1	0	800

$B = (x_3, x_4, x_5)$ base réalisable dont la solution n'est pas optimale.

* Changement de base :
Variable entrante $= x_1$
Variable sortante (optimisée les contraintes de x_1) :

$\begin{cases} 1.v + 1.x_3 = 100 \\ 2v + 1.x_4 = 150 \\ 5v + 1.x_5 = 800 \end{cases}$ $\tilde{v} = \min\left(\frac{100}{1} ; \underset{75}{\frac{150}{2}} ; \underset{160}{\frac{800}{5}}\right)$

Variable sortante : x_4
d'où la nouvelle base $B_1 = (x_1, x_3, x_5)$

Recherche du pivot : 2

$L_3' \leftarrow \frac{L_3}{2}$

$L_1' \leftarrow 80 . \frac{L_3}{2} + L_1$

$L_2' \leftarrow -1 . L_3/2 + L_2$

$L_4' \leftarrow -5 . L_3/2 + L_4$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	s.m.
0	-20	0	40	0	-2	6000
0	1/2	1	-1/2	0	0	25
1	1/2	0	1/2	0	0	75
0	15/2	0	-5/2	1	0	425

→ La solution obtenue n'est pas optimale.
On fait un nouveau changement de base.
Variable entrante : x_2
Variable sortante :

$\begin{cases} \frac{1}{2}v + x_3 = 25 \\ \frac{1}{2}v + x_1 = 75 \\ \frac{15}{2}v + x_5 = 425 \end{cases}$ $\tilde{v} = \min\left(\frac{25}{1/2} ; \frac{75}{1/2} ; \frac{425}{1/2}\right)$

Variable sortante : x_3

Nouvelle base : $B = (x_1, x_2, x_5)$

Recherche du pivot : $\frac{1}{2}$

$L_2'' \leftarrow 2L_2'$

$L_1'' \leftarrow 20 \cdot 2L_2' + L_1$

$L_3'' \leftarrow -1/2 \cdot 2L_2' + L_3$

$L_4'' \leftarrow \frac{15}{2} \cdot 2L_2' + L_4$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	s.m.
0	0	40	20	0	-1	7000
0	1	2	-1	0	0	50
1	0	-1	4	0	0	50
0	0	-15	5	1	0	50

Solution : $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 50$

$\tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = 0$) hors base

$\tilde{x}_5 = 50$ et $w = -7000$

$\Rightarrow z_{max} = 7000$

2| i) $\min (W = x_1 - 2x_2 + 2x_3)$

⚠ on a des égalités.

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 & (1) \\ -x_1 + 3x_2 = -4 & (2) \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

On utilise la méthode des pénalités.

- Dans (1), on rajoute une variable artificielle x_1^a.

  (1) devient : $x_1 + x_2 - x_3 + x_1^a = 3 \Rightarrow x_1^a = 3 - x_1 - x_2 + x_3$
- On multiplie (2) par -1 puis on ajoute une variable artificielle x_2^a

  (2) devient : $x_1 - 3x_2 + x_2^a = 4 \Rightarrow x_2^a = 4 - x_1 + 3x_2$
- Et la fonction objective $\tilde{W} = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + M(x_1^a + x_2^a)$

$$= x_1 - 2x_2 + 2x_3 + M(3 - x_1 - x_2 + x_3 + 4 - x_1 + 3x_2)$$

$$= (1 - 2M)x_1 + 2(M-1)x_2 + (2+M)x_3 + 7M$$

Forme standard : $\min (\tilde{W} = (1-2M)x_1 + 2(M-1)x_2 + (2+M)x_3 + 7M)$

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_1^a = 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_2^a = 4 \\ x_i \geq 0 \, , x_i^a \geq 0 \end{cases}$

1er tableau :

x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	w	s.m
$1-2M$	$2(M-1)$	$2+M$	0	0	-1	$-7M$
1	1	-1	1	0	0	3
1	-3	0	0	1	0	4

$B = (x_1^a, x_2^a)$ base réalisable de solution non optimale.

On fait un changement de base.

Variable entrante : x_2

Variable sortante : x_1^a

2e tableau :

$L_2' \leftarrow L_2$

$L_1' \leftarrow -(1-2M)L_2 + L_1$

$L_3' \leftarrow -L_2 + L_3$

x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	w	s.m
0	$4M-3$	$3-M$	$2M-1$	0	-1	$-7M-3$
1	1	-1	1	0	0	3
0	-4	1	-1	1	0	1

TD 3 ②

2) iii) $\min(z = x_1 - 2x_2)$ avec $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 & (1) \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 & (2) \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

(1) $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 + \underbrace{x_3} = 3$

⚠ inégalités.

(2) $\Rightarrow$ $-x_1 + 3x_2 + \underbrace{x_4} = -4$

On multiplie par -1 $\Rightarrow$ $x_1 - 3x_2 - x_4 = 4$

On rajoute dans (2) une variable artificielle : $x_1 - 3x_2 - x_4 + x_1^a = 4$

$\Rightarrow x_1^a = 4 - x_1 + 3x_2 + x_4$

$$\tilde{w} = x_1 - 2x_2 + Mx_1^a = x_1 - 2x_2 + M(4 - x_1 + 3x_2 + x_4)$$
$$= x_1(1-M) + x_2(3M-2) + Mx_4 + 4M$$

D'où $\min(\tilde{w} = (1-M)x_1 + (3M-2)x_2 + Mx_4 + 4M)$

avec $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 + x_1^a = 4 \\ x_i \geq 0,\ x_1^a \geq 0 \end{cases}$

1er tableau :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	w	s.m
$1-M$	$3M-2$	0	M	0	-1	$-4M$
1	1	1	0	0	0	3
1	-3	0	-1	1	0	4