TD 3 Programmation linéaire et optimisation
(Méthode du simplexe : cas particuliers et utilisation de solveurs)

Exercice 1 : valorisations marginales
Voici un petit exemple illustrant ce qu'est la programmation linéaire. Un boulanger fabrique de la brioche et du pain viennois, désignés respectivement par X_1 et X_2. Il dispose pour cela de farine A en quantité $a = 80$, de beurre B en quantité $b = 24$ et de sucre C en quantité $c = 36$.
On suppose la linéarité de la production : x_1 unités de X_1 et x_2 unités de X_2 exigent $u_A = 5x_1 + 4x_2$ unités de A, $u_B = x_1 + 2x_2$ unités de B, et $u_C = 3x_1 + 2x_2$ unités de C.

Enfin on suppose que le boulanger vend sa brioche X_1 à un prix $p = 40$ et son pain brioché X_2 à un prix **q** = 50, que l'on supposera tous deux indépendants de la quantité vendue, et on considère qu'il vend tout ce qu'il produit. Le boulanger veut maximiser son chiffre d'affaire ***CA***, tout en étant contraint de n'utiliser que ce qu'il a en stock.

1. Résoudre ce PL par la méthode des tableaux
2. Résoudre le PL en utilisant le solveur de OpenOffice
3. En utilisant la fonction ***linpro*** de SCILAB, résoudre le problème de notre boulanger.
4. Quel sont les constituants limitant ? Quelles sont leurs valorisations marginales respectives ?

Réponse:

On reconnait ici un problème de maximisation d'une forme linéaire sous contraintes linéaires d'inégalité. La fonction *linpro* de SCILAB est donc parfaitement désignée pour résoudre ce problème.

1. Résoudre la méthode des tableaux

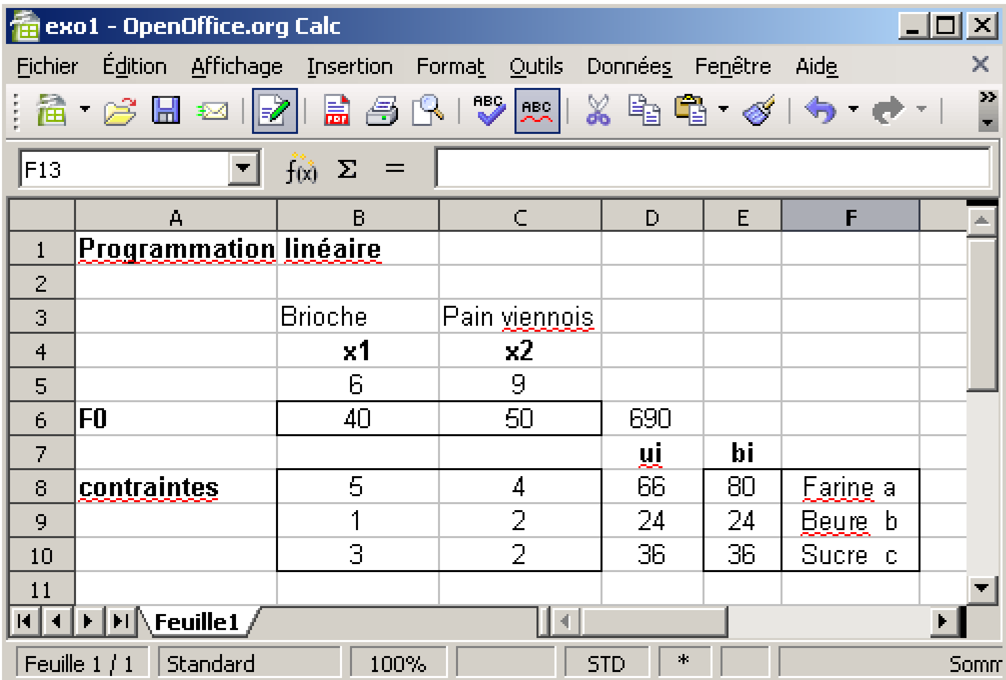
$$\begin{cases} z - 40x_1 - 50x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + s_1 = 80 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_3 = 36 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
5	4	1	0	0	80	80/4	s_1
1	2	0	1	0	24	**24/2**	s_2
3	2	0	0	1	36	36/2	s_3
-40	**-50**	0	0	0	0		

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
3	0	1	-2	0	32	32/3	s_1
1/2	1	0	1/2	0	12	12*2	x_2
2	0	0	-1	1	12	**12/2**	s_3
-15	0	0	25	0	600		

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**bi**	**ratio**	**base**
0	0	1	-1/2	-3/2	**14**		s_1
0	1	0	3/4	-1/4	**9**		x_2
1	0	0	-1/2	1/2	**6**		x_1
0	**0**	**0**	**17.5**=35/2	**7.5**=15/2	**690**		

2. Résoudre le PL en utilisant le solveur de OpenOffice



3. En utilisant la fonction ***linpro*** de SCILAB, résoudre le problème de notre boulanger.

Dans SCILAB, il faut procéder de la sorte :

On définit les vecteurs et matrice nécessaires :

P=-[40;50]
S=[80;24;36]
M=[5,4; 1,2; 3,2]
Zu=[]
Zl=[0;0]

On utilise la fonction *linpro* de la manière suivante :

[Zopt,lag,CA]=linpro(P,M,S,Zl,Zu)

Les vecteurs Zu et Zl sont les bornes du domaine d'admissibilité pour le vecteur Z. Le fait que Zu soit le vecteur vide signifie simplement qu'il n'y a pas de bornes supérieures pour Z.

Après résolution du problème, la production optimale est Zopt = $(6, 9)^T$, soit une production de $\boldsymbol{x}_{opt} = 6$ brioches et de $\boldsymbol{y}_{opt} = 9$ pains viennois, et le CA est de 690.

4. Quel sont les constituants limitant? Quelles sont leurs valorisations marginales respectives ?

La valorisation marginale (ou les coûts marginaux) d'un constituant correspond au surplus de chiffre d'affaire que peut réaliser le boulanger s'il augmente d'une unité le stock du composant considéré.

On calcule les coûts marginaux c'_{ij} correspondant aux variables hors base de la manière :

$$c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \textbf{ pour chaque } (i, j) \textbf{ hors base}$$

Ici les valorisations marginales sont données par les coefficients de *Lagrange* associés aux contraintes de stock des différents constituants.

La fonction *linpro* renvoie dans le tableau appelé ici lag, des coefficients de *Lagrange* associés au problème posé.

$$lag = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17{,}5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$$

On peut voir que ceux associés aux trois premières contraintes, à savoir les conditions de signes pour $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, et la contrainte sur le stock de constituant a sont nuls, ce qui signifie que ces contraintes ne sont pas actives.
En effet $x \geq 0$, $y \geq 0$, et il reste de la farine en quantité δa, avec $\delta \boldsymbol{a}$ **-5x - 4y**
soit $\delta \boldsymbol{a}$ **= 80 – 5*6 – 4*9 = 14** unités de farine.
À l'inverse, les contraintes sur le sucre $\boldsymbol{C}$ et le beurre $\boldsymbol{B}$ sont actives, et les valorisations marginales de ces constituants sont $\boldsymbol{p_b}$ = 17.5 pour le beurre et $\boldsymbol{p_c}$= 7.5 pour le sucre.

Cela signifie que si le beurre coûte moins cher que 17,5, le boulanger a intérêt à en acheter.
Ainsi les valorisations marginales correspondent aux valeurs des différents constituants aux yeux du boulanger.

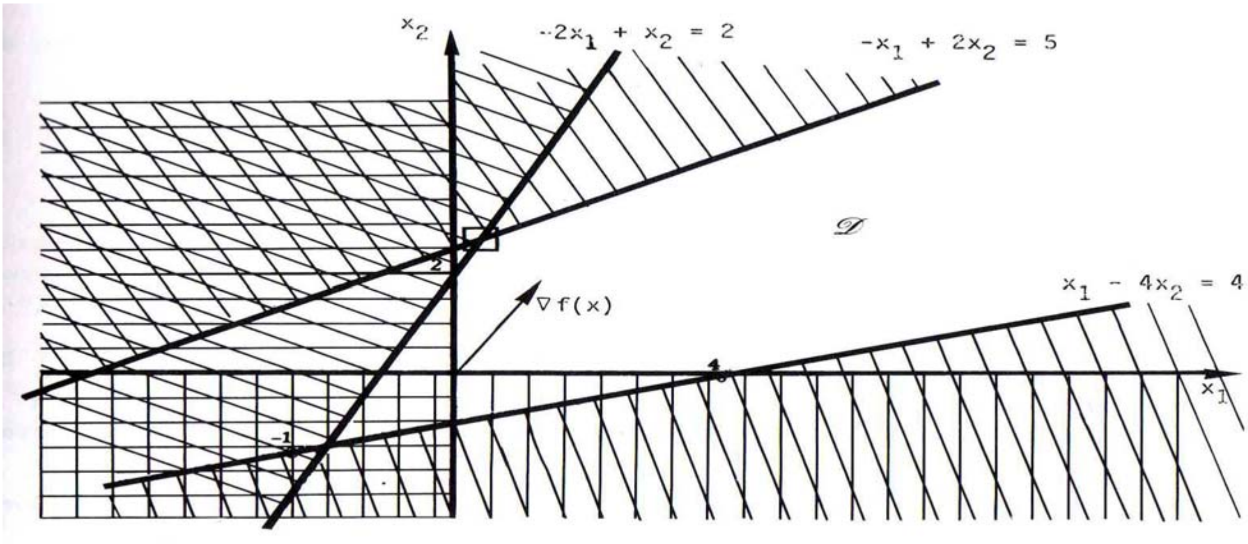
Exercice 2: solutions non bornées

$$\begin{cases} \text{Trouver le maximum de } z = x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Faire une résolution graphique
2. Tenter de résoudre ce PL à l'aide du simplexe
3. Utiliser les logiciels connus pour résoudre ce PL
4. Conclusion

Réponse:

1. La résolution graphique est :



2. Tenter de résoudre ce PL à l'aide du simplexe

$$\begin{cases} z - x_1 - 2x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + s_1 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + s_3 = 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
-2	**1**	1	0	0	2	**2**	s_1
-1	2	0	1	0	5	2/5	s_2
1	-4	0	0	1	4		s_3
-1	**-2**	0	0	0	0		

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
-2	1	1	0	0	2		x_2
3	0	-2	1	0	1	**3**	s_2
-7	0	4	0	1	12		s_3
-5	0	+2	0	0	4		

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
0	1	-1/3	2/3	0	8/3		x_2
1	0	-2/3	1/3	0	1/3		x_1
0	0	-2/3	7/3	1	43/3		s_3
0	0	**-4/3**	5/30	0	17/3		

La colonne de $\mathbf{s_1}$ possède le coefficient de la fonction objectif négatif, donc on peut l'améliorer. La variable $\mathbf{s_1}$ peut entrer dans la nouvelle base, mais on ne peut pas trouver de pivot car tous les coefficients sont négatifs.
Donc il y a une solution optimale non bornée supérieurement.

3. Utiliser les logiciels connus pour résoudre ce PL
Solveur de OpenOffice : solution ne peut être trouvée
Solveur de Scilab : Solution non bornée, donc il fat choisir les bornes supérieures pour x_1 et x_2 c-à-d donner par exemple les valeurs à Zu=[10;10]

4. Conclusion
Je vous laisse conclure

Exercice 3: dégénérescence duale

$$\begin{cases} \text{Trouver le maximum de } z = 14x_1 + 10x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ 5\,x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre ce PL à l'aide du simplexe
2. Montrer qu'il existe une solution réalisable de base et une seule équivalente à la solution précédente
3. Utiliser les logiciels connus pour résoudre ce PL

<u>Réponse:</u>

$$\begin{cases} z - 14x_1 - 10x_3 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + s_1 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + s_2 = 8 \\ 5\,x_1 - x_2 + x_3 + s_3 = 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre ce PL à l'aide du simplexe

L'itération correspondant à la solution optimale est :

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{s_3}$	**bi**	**ratio**	**base**
0	-10/9	0	1	-2/9	-1/9	2/3		$\mathbf{s_1}$
0	7/18	1	0	5/18	-1/9	5/3		$\mathbf{x_3}$
1	-5/18	0	0	-1/18	2/9	2/3		$\mathbf{x_1}$
0	0	0	0	+2	+2	26		

La solution de base est :
$\mathbf{x_1} = 2/3$
$\mathbf{x_3} = 5/3$
$\mathbf{s_1} = 2/3$
$\mathbf{x_2} = 0$
$\mathbf{s_2} = 0$
$\mathbf{s_3} = 0$
$z = 26$

2. Montrer qu'il existe une solution réalisable de base et une seule équivalente à la solution précédente

On remarque qu'une des variable hors base $\mathbf{x_2}$ a un profit marginal nul à l'optimum, il y a donc "une dégénérescence dual" (c-à-d à l'optimum du dual, une variable de base est nulle).
Si on fait entrer cette variable dans la base, on obtient une seconde solution optimale avec le tableau correspondant du simplexe

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{s_3}$	**bi**	**ratio**	**base**
0	0	20/7	1	4/7	-3/7	38/7		$\mathbf{s_1}$
0	1	18/7	0	5/7	-2/7	30/7		$\mathbf{x_2}$
1	0	5/7	0	1/7	1/7	13/7		$\mathbf{x_1}$
0	0	0	0	+2	+2	26		

La deuxième solution de base est :
$\mathbf{x_1} = 13/7$
$\mathbf{x_2} = 30/7$
$\mathbf{s_1} = 38/7$
$\mathbf{x_3} = 0$
$\mathbf{s_2} = 0$
$\mathbf{s_3} = 0$
$z = 26$

3. Utiliser les logiciels connus pour résoudre ce PL

Exercice 4 : problème de cyclage

$$\begin{cases} \text{Trouver le maximum de } z = 3/4\, x_1 - 150x_2 + 1/50\, x_3 - 6x_4 \\ 1/4\, x_1 - 60x_2 - 1/25\, x_3 + 9x_4 \le 0 \\ 1/2\, x_1 - 90x_2 - 1/50\, x_3 + 3x_4 \le 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 \qquad \le 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la méthode du simplexe conduit à un cyclage
2. Utiliser les logiciels connus pour résoudre ce PL
3. Conclusion

Réponse:

$$\begin{cases} z - 3/4x_1 + 150x_2 - 1/50x_3 + 6x_4 = 0 \\ 1/4\, x_1 - 60x_2 - 1/25\, x_3 + 9x_4 + s_1 = 0 \\ 1/2\, x_1 - 90x_2 - 1/50\, x_3 + 3x_4 + s_2 = 0 \\ x_3 + s_3 = 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1. montrer que la méthode du simplexe conduit à un cyclage

T1

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
1/4	-60	-1/25	9	1	0	0	0	**0**	s_1
1/2	-90	-1/50	3	0	1	0	0	0	s_2
0	0	1	0	0	0	1	1		s_3
-3/4	150	-1/50	6	0	0	0	0		

T2

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
1	-240	-4/25	36	4	0	0	0		x_1
0	**30**	3/50	-15	-2	1	0	0	0	s_2
0	0	1	0	0	0	1	1		s_3
0	**-30**	-7/50	+33	+3	0	0	0		

T3

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
1	0	**8/25**	-84	-12	0	0	0		x_1
0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0	0		x_2
0	0	1	0	0	0	1	1		s_3
0	0	-2/25	+18	+1	+1	0	0		

T7

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
1/4	-60	-1/25	9	1	0	0	0	0	s_1
1/2	-90	-1/50	3	0	1	0	0	0	s_2
0	0	1	0	0	0	1	1		s_3
-3/4	150	-1/50	6	0	0	0	0		

Le septième tableau est identique au tableau initial ! Il y a cyclage

2. Utiliser les logiciels connus pour résoudre ce PL

3. Conclusion