

Méthode géométrique:

Ex 1:

$$\max(Z = x_1 + 2x_2)$$

avec

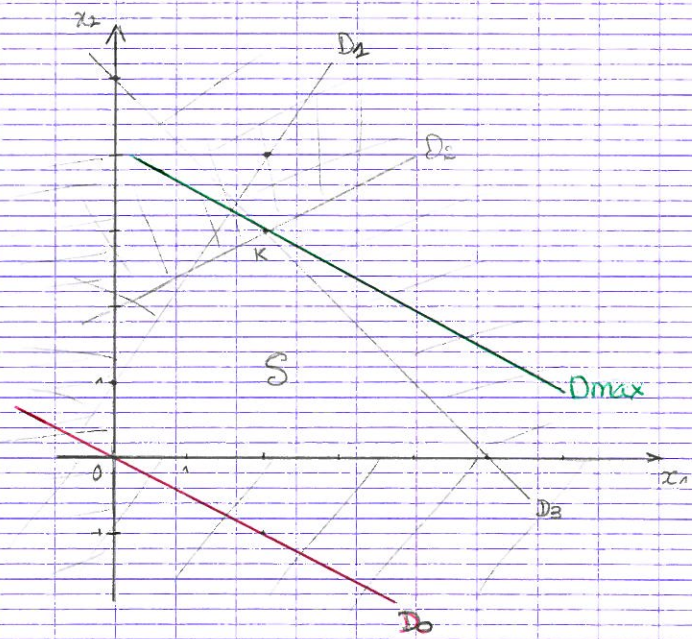
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$D_1: \frac{3}{2}x_1 + 1 = x_2$$

$$D_2: \frac{1}{2}x_1 + 2 = x_2$$

$$D_3: -x_1 + 5 = x_2$$

$$D_0: x_2 = -\frac{1}{2}x_1$$



$$K = D_2 \cap D_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2 \times 5 - 2x_1 = 4 \\ x_2 = 5 - x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3x_1 = -6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$D'où Z_{max} = 2 + 2 \times 3 = 8$$

Ex 2:

(i) $\max(Z = x_1 + \frac{1}{2}x_2)$

avec

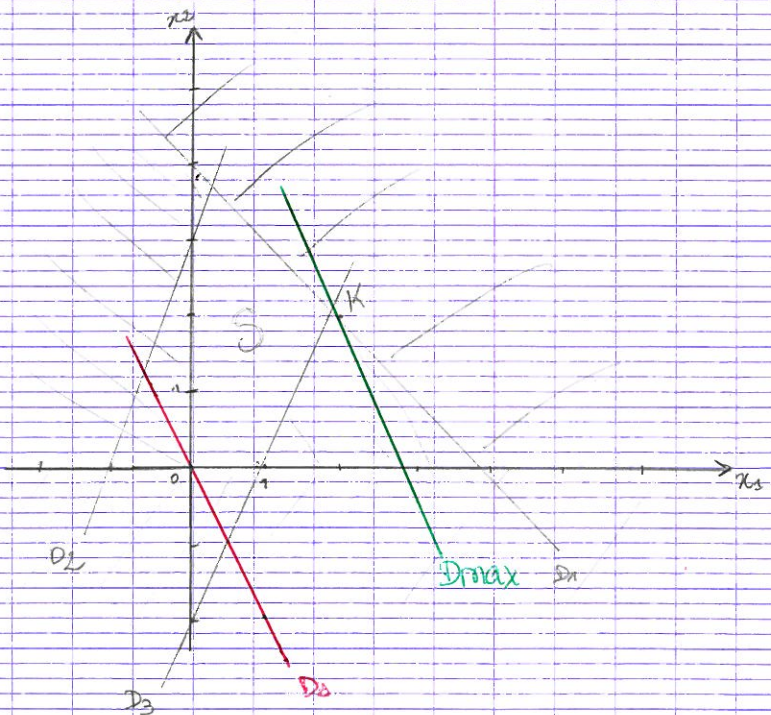
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$D_1: x_2 = 4 - x_1$$

$$D_2: x_2 = 3 + 3x_1$$

$$D_3: x_2 = -2 + 2x_1$$

$$D_0: x_2 = -2x_1$$



$$K = D_1 \cap D_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4 - x_1 \\ x_1 - 2 + \frac{1}{2}(4 - x_1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

$$D'où Z_{max} = 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 3$$

ii)

$$\max(Z = 10x_1 + 20x_2)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 + 4x_2 \leq 64 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 110 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$D_1: x_2 = 30 - 2x_1$$

$$D_2: x_2 = \frac{64 - x_1}{4} = 16 - \frac{1}{4}x_1$$

$$D_3: x_2 = \frac{110 - 5x_1}{6} = \frac{55}{3} - \frac{5}{6}x_1$$

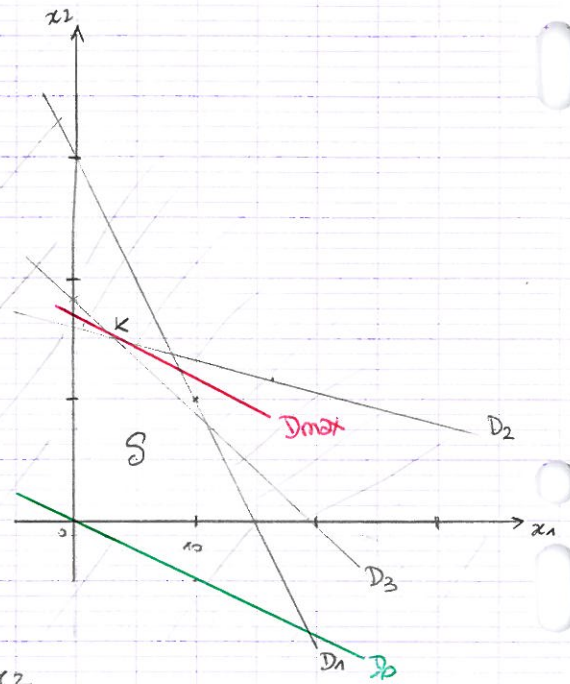
$$D_4: x_2 = \frac{-10x_1}{20} = -\frac{1}{2}x_1$$

$$K = D_2 \cap D_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 64 \\ 5x_1 + 6x_2 = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 64 - 4x_2 \\ 5(64 - 4x_2) + 6x_2 = 110 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 64 - 4x_2 \\ -14x_2 = -210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 15 \end{cases}$$

$$\text{D'où } Z_{\max} = 10 \times 4 + 20 \times 15 = 340$$



Méthode des tableaux du simplexe :

Exo 1 : Forme standard : $\min(w = -z = -x_1 - 2x_2)$

$$\text{avec : } \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_3, x_4, x_5 \text{ variable d'écart} \end{cases}$$

1^{er} tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	ec. membre	
-1	-2	0	0	0	-1	0	L ₁
-3	2	1	0	0	0	2	L ₂
-1	2	0	1	0	0	4	L ₃
1	1	0	0	1	0	5	L ₄

La base actuelle $B_0 = (x_3, x_4, x_5)$ est réalisable car d'éléments positifs, sa solution est :

$$\begin{matrix} \tilde{x}_3 = 2 \\ \tilde{x}_4 = 4 \\ \tilde{x}_5 = 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 0 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \end{matrix}} \right) \text{ hors base}$$

$w = 0$

Mais $c_1 < 0 \Rightarrow$ la solution obtenue n'est pas optimale.
On fait alors un changement de base.

Variable entrante x_2 car $C_2 < C_1$.

Détermination de la variable sortante : on cherche $\tilde{\sigma}$ qui optimise les contraintes de x_2

$$\begin{cases} 0 + 2 \cdot \tilde{\sigma} + 1 \cdot x_3 = 2 \\ 0 + 2 \cdot \tilde{\sigma} + 1 \cdot x_4 = 4 \\ 0 + 1 \cdot \tilde{\sigma} + 1 \cdot x_5 = 5 \end{cases} \quad \tilde{\sigma} = \min\left(\frac{2}{2}; \frac{4}{2}; 5\right) = 1$$

variable hors base \rightarrow

\rightarrow la variable sortante est x_3 .
(c'est l'équation qui est vérifiée)

D'où la nouvelle base $B_1 = (x_2, x_4, x_5)$

Recherche du pivot : l'intersection de la ligne de la variable sortante x_3 avec la colonne de la variable entrante x_2 - Pivot = 2

Echelonnage :

$$\begin{aligned} L_2' &\leftarrow \frac{L_2}{2} \\ L_1' &\leftarrow 2 \cdot \frac{L_2}{2} + L_1 \\ L_3' &\leftarrow -2 \cdot \frac{L_2}{2} + L_3 \\ L_4' &\leftarrow -1 \cdot \frac{L_2}{2} + L_4 \end{aligned}$$

2^e tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	s.m.
-4	0	1	0	0	-1	2
$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1
2	0	-1	1	0	0	2
$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	4

La base actuelle $B_1 = (x_2, x_4, x_5)$ est réalisable car d'éléments positifs, sa solution :

$$\begin{matrix} \tilde{x}_2 = 1 \\ \tilde{x}_4 = 2 \\ \tilde{x}_5 = 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_3 = 0 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \end{matrix}} \right) \text{ hors base}$$

$w = -2$

Mais $C_1 = -4 < 0 \Rightarrow$ cette solution n'est pas optimale. On fait un changement de base :

Variable entrante = x_1

On optimise les contraintes de x_1

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x_1 + x_2 = 1 & \text{coeff. négatif} \rightarrow \text{on ne le prend pas en compte.} \\ 2x_1 + x_4 = 2 \\ 5/2 x_1 + x_5 = 4 \end{cases} \Rightarrow \tilde{\sigma} = \min\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{5/2}\right) = 1$$

\Rightarrow La variable sortante est x_4 .

La nouvelle base est donc $B_2 = (x_1, x_2, x_5)$.

Recherche du pivot : pivot = 2

$$L_3' \leftarrow L_3/2$$

$$L_1' \leftarrow 4 \cdot L_3/2 + L_1$$

$$L_2' \leftarrow 3/2 \cdot L_3/2 + L_2$$

$$L_4' \leftarrow -5/2 \cdot L_3/2 + L_4$$

3^e tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	S.M.
0	0	-1	2	0	-1	6
0	1	-1/4	3/4	0	0	5/2
1	0	-1/2	1/2	0	0	1
0	0	3/4	-5/4	1	0	3/2

La base actuelle est $B_2 = (x_1, x_2, x_5)$

est réalisable, sa solution :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 1 & \tilde{x}_4 &= 0 \\ \tilde{x}_2 &= 5/2 & \tilde{x}_5 &= 0 \\ \tilde{x}_3 &= 3/2 & w &= -6 \end{aligned} \text{ pas base}$$

Mais $C_3 = -1 < 0 \Rightarrow$ cette solution n'est pas optimale. On fait un nouveau changement de base.

Variable entrante x_3 .

Variable sortante : on optimise la contrainte de $x_3 = \frac{3}{4}x_1 + x_5 = \frac{3}{2}$

\Rightarrow La variable sortante est x_5 .

La base devient : $B_3 = (x_1, x_2, x_3)$

Recherche du pivot : pivot = 3/4

$$L_4' \leftarrow \frac{4}{3}L_4$$

$$L_1' \leftarrow 1 \cdot \frac{4}{3}L_4 + L_1$$

$$L_2' \leftarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}L_4 + L_2$$

$$L_3' \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}L_4 + L_3$$

4^e tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	Sm.
0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	8
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3
1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
0	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	2

La base actuelle est $B_3 = (x_1, x_2, x_3)$ est réalisable, sa solution est :

$$\begin{matrix} \tilde{x}_1 = 2 \\ \tilde{x}_2 = 3 \\ \tilde{x}_3 = 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \tilde{x}_4 = 0 \\ \tilde{x}_5 = 0 \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{hors base}$$

$$w = -8$$

Cette solution est optimale car tous les $C_i > 0$.

La solution : $Z^* = 8$

Exo 2 : ① forme standard : $\min (-Z = w = -x_1 - \frac{1}{2}x_2)$

$$\text{avec } \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

x_3, x_4, x_5 variable d'écart

1^{er} tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	sm
-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	0
-1	-1	1	0	0	0	4
3	-1	0	1	0	0	3
-1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	1

La base actuelle $B_0 = (x_3, x_4, x_5)$ est réalisable car d'éléments positifs.

Sa solution est :

$$\begin{matrix} \tilde{x}_3 = 4 \\ \tilde{x}_4 = 3 \\ \tilde{x}_5 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 0 \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{hors base}$$

$$w = 0$$

Mais $C_i < 0 \Rightarrow$ La solution obtenue n'est pas optimale.
On fait donc un changement de base.

Variable entrante x_2 car $C_2 < C_1$

Détermination de la variable sortante : on cherche \tilde{v} qui optimise les contraintes de x_2

$$\begin{cases} -v + x_3 = 4 & \text{coeff négatif} \\ -v + x_4 = 3 \\ \frac{1}{2} \cdot v + x_5 = 1 \end{cases} \quad \tilde{v} = \min(\cancel{4}, \cancel{3}, \frac{1}{2}) = \cancel{4} \cdot 2$$

→ La variable sortante est ~~x_3~~ x_5

D'où la base : $B_1 = (x_2, x_4, x_5)$

Recherche du pivot : l'intersection de la ligne de x_5 et de la colonne x_2 . Pivot = ~~$\frac{1}{2}$~~ $\frac{1}{2}$

Echelonnage :

$$\begin{array}{l} L_4' \leftarrow \\ L_1' \leftarrow \quad +L_1 \\ L' \leftarrow \quad +L \\ L' \leftarrow \quad +L \end{array}$$

2^e tableau du simplexe :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	s.m.
$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	
1	1	-1	0	0	0	
2	-2	1	1	0	0	
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	

La base actuelle B_1 est réalisable