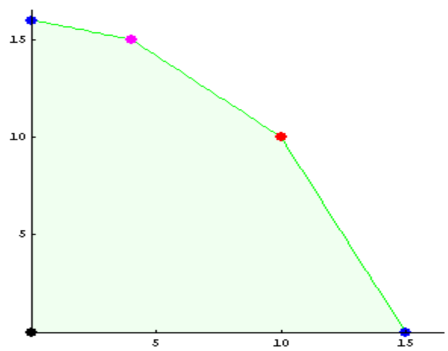
TD 2 Programmation linéaire et optimisation
(Méthode du simplexe)

Exercice 1: On considère la région R dans un plan définie par les inégalités suivantes :
$2x + y \leq 30$
$x + 4y \leq 64$
$5x + 6y \leq 110$
$x \geq 0$ et $y \geq 0$

Trouver le maximum de $z = f(x, y) = 10x + 20y$ sur la région R

<u>Solution</u>
Le domaine R est :



Soit le tableau initial suivant :

x	**y**	**s1**	**s2**	**s3**	**bi**	**bi/ai**	**variables de base**
2	1	1	0	0	30	0	s1
1	4	0	1	0	64	0	s2
5	6	0	0	1	110	0	s3
-10	-20	0	0	0	0	0	

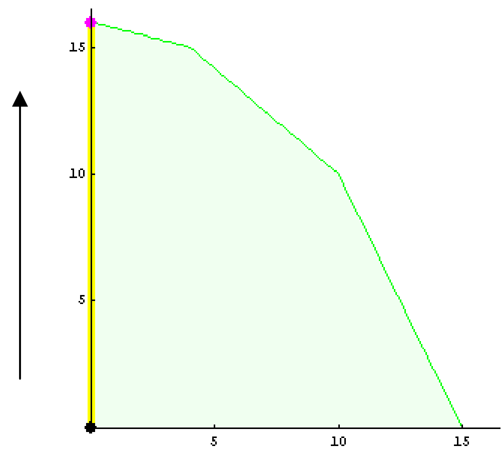
x	**y**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**bi**	**bi/ai**	**variables de base**
2	1	1	0	0	30	30	s1
1	**4**	0	1	0	64	**16**	**s2**
5	6	0	0	1	110	18.33	s3
-10	**-20**	0	0	0	0	0	

On choisit comme pivot la valeur 4, donc la variable entrante est y et la variable sortante est s_2

x	**y**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**bi**	**bi/ai**	**variables de base**
7/4	0	1	-1/4	0	14	s1	s1
1/4	1	0	1/4	0	16	y	y
7/2	0	0	-3/2	1	14	s3	s3
-5	0	0	5	0	320		

Pour obtenir ce tableau, on divise la ligne deux par le pivot (4) et on élimine tous les coefficients sur cette colonne

De la colonne 2 on remarque que y=16. Le nouveau point {x, y} ={0, 16} est une solution faisable. La méthode du simplexe s'est déplacé de son point précédant {x, y} ={0, 16} le long de l'arête x=0 vers le point {x, y} ={0, 16}.



La prochaine étape dans la méthode du simplexe est de déterminer le prochaine échange de variables.

x	**y**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**bi**	**bi/ai**	**variables de base**
7/4	0	1	-1/4	0	14	8	s1
1/4	1	0	1/4	0	16	64	y
7/2	0	0	-3/2	1	14	**4**	**s3**
-5	0	0	5	0	320		

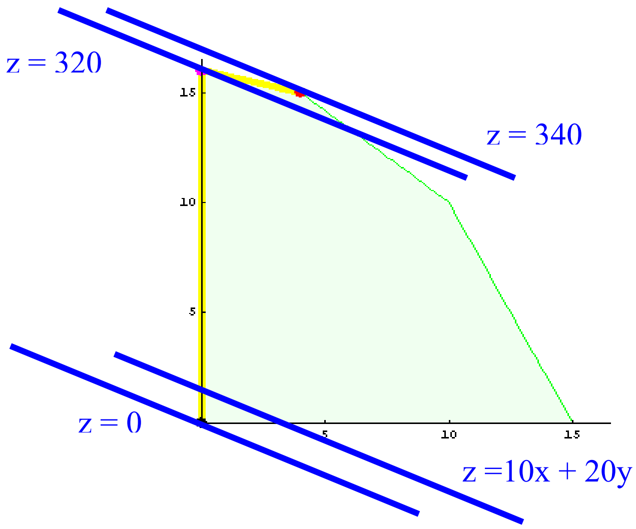
On choisit comme pivot la valeur 7/2, donc la variable entrante est x et la variable sortante est s_3

x	**y**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**bi**	**bi/ai**	**variables de bases**
0	0	1	1/2	-1/2	7		s1
0	1	0	5/14	-1/14	15		y
1	0	0	-3/7	2/7	4		x
0	0	0	20/7	10/7	340		

Pour obtenir ce tableau, on divise la ligne deux par le pivot (7/2) et on élimine tous les coefficients sur cette colonne

Il n'y a plus de coefficients négatifs sur la dernière ligne qui donne la fonction objectif, alors la solution est trouvée.

De la colonne 1 et ligne 3 on voit que x = 4. De la colonne 2 et ligne 2 on trouve y=15. Le nouveau point {x, y} ={4, 15} est une solution faisable. La méthode du simplexe s'est déplacé de la solution précédant {x, y} ={0, 16} le long de l'arête x + 4y =64 vers le point {x, y} ={4, 15}. La valeur de la fonction objectif est donnée par la dernière ligne sur la colonne bi (b_4=340)



La valeur de la fonction objectif est augmentée quand on se déplace autours de la région des solution admissibles :

f [{0, 0}] = 0

f [{0, 16}] = 320

f [{4, 15}] = 340

Exercice 2: résoudre par la méthode du simplexe le PL standard suivant

Maximise la fonction objectif suivante $Z = x_1 + 2x_2 - x_3$

Soumise aux conditions suivantes:

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 14$

$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 28$

$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 30$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$

__**Solution**__

MAXIMIZE

$Z = x_1 + 2x_2 - x_3$

SUBJECT TO:

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 14$

$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 28$

$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 30$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$

$\xrightarrow{\boxed{1}}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 \quad &= 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad + s_2 \quad &= 28 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \quad + s_3 &= 30 \end{aligned}$$

ALL VARIABLES ≥ 0

$\xrightarrow{\boxed{2}}$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 28 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ \hline -1 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 28 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ \hline -1 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

RATIOS

$14 \div 1$

$28 \div 2$

$30 \div 5$

$\xrightarrow{\left(\frac{1}{5}\right) r_3 - R_3}$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 28 \\ \frac{2}{5} & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 6 \\ \hline -1 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r_1 - r_3 = R_1$

$r_2 - 2r_3 = R_2$

$r_4 + 2r_3 = R_4$

TO NEXT LINE

PIVOT COLUMN

INDICATOR ROW

PIVOT ROW

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{8}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 8 \\ \frac{16}{5} & 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 16 \\ \frac{2}{5} & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 6 \\ \hline -\frac{1}{5} & 0 & 3 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 12 \end{array}\right]$$

RATIOS

$8 \div \frac{8}{5} = 5$ TIE: SEE BELOW

$16 \div \frac{16}{5} = 5$

$6 \div \frac{2}{5}$

$\left(\frac{5}{16}\right) r_2 = R_2$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{8}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 8 \\ 1 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} & 5 \\ \frac{2}{5} & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 6 \\ \hline -\frac{1}{5} & 0 & 3 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 12 \end{array}\right]$$

$r_1 - \frac{8}{5} r_2 = R_1$

$r_3 - \frac{2}{5} r_2 = R_3$

$r_4 + \frac{1}{5} r_2 = R_4$

TO MATRIX BELOW

PIVOT COLUMN

PIVOT ROW

INDICATOR ROW

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} & 5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 4 \\ \hline 0 & 0 & \frac{49}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & 13 \end{array}\right]$$

INDICATOR ROW

$x_3 = s_2 = s_3 = 0$

$0x_1 + 0x_2 - \frac{1}{2}x_3 + s_1 - \frac{1}{2}s_2 + 0s_3 = 0$ or $s_1 = 0$

$1x_1 + 0x_2 - \frac{5}{16}x_3 + 0s_1 + \frac{5}{16}s_2 - \frac{1}{8}s_3 = 5$ or $x_1 = 5$

$0x_1 + x_2 - \frac{7}{8}x_3 + 0s_1 - \frac{1}{8}s_2 + \frac{1}{4}s_3 = 4$ or $x_2 = 4$

AND $\mathbf{Z} = 13$

Exercice 3

Un investisseur doit choisir parmi les 2 types d'actifs Ilog et BNP Paribas. L'action Ilog a une espérance de gain de 80 € et l'action BNP 20 €.

L'investisseur ne peut acheter au total que 100 actions et compte dépenser au plus 800 €.

L'action Ilog coûte 5 € et l'action BNP 10 €.

L'achat des actions se fait d'autre part via une banque qui touche une commission de 2 € par action Ilog et 1 € par action BNP. L'investisseur ne veut pas dépasser 150 € de commissions.

Combien d'actions de chaque type l'investisseur doit acheter pour maximiser ses revenus futurs ?

1. Définir les variables de décision.
2. Ecriture la fonction objectif.
3. Définir les contraintes.
4. Ecrire la forme générale du PL
5. Résoudre graphiquement ce PL
6. Résoudre le simplexe avec la méthode du tableau
7. Donner le simplexe sous forme matricielle
8. Résoudre le PL en utilisant les logiciels (Excel et Scilab)

Solution

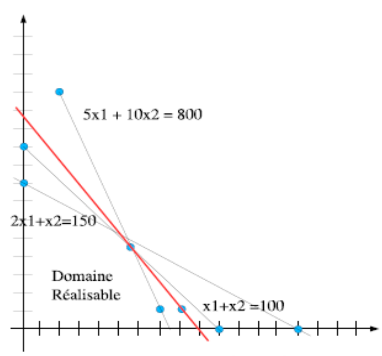
1. Définir les variables de décision.
On entend par variable de décision les variables sur lesquelles les décisions doivent être prises. Dans notre exemple la décision se situe sur la quantité d'actions de chaque type à acheter. Nous désignerons donc par x_1 et x_2 les variables représentant respectivement les quantités d'actions Ilog et BNP à acheter.

2. Ecriture la fonction objectif.
La fonction objectif est la fonction à optimiser. Dans notre exemple cette fonction représente le revenu retiré de l'achat de x_1 actions Ilog et x_2 actions BNP.
Son expression est donc : $80x_1 + 60x_2$.

3. Définir les contraintes.
La limite d'achat de 100 actions se traduit par : $x_1 + x_2 \leq 100$.
La limitation des commissions à 150 €. se traduit par : $2x_1 + x_2 \leq 150$.
La limitation du budget à 800 €. se traduit par : $5x_1 + 10\,x_2 \leq 800$.
Les contraintes de non négativité $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

4. Ecrire la forme générale du PL
Max z = $80x_1 + 60x_2$
Sujette à :
$x_1 + x_2 \leq 100$
$2x_1 + x_2 \leq 150$
$5x_1 + 10x_2 \leq 800$
$x_1; x_2 \geq 0$

5. la résolution graphique



6. Résoudre le simplexe en utilisant la méthode du tableau
Max z = $80x_1 + 60x_2$
Sujette à :
$x_1 + x_2 + x_3 = 100$
$2x_1 + x_2 + x_4 = 150$
$5x_1 + 10x_2 + x_5 = 800$
$x_1; x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

On écrit initialement le tableau suivant :

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	80	60	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	100
x_4	2	1	0	1	0	150
x_5	5	10	0	0	1	800

On désigne par $\Downarrow$ la variable qui doit être augmentée (celle rentrante dans la base) et par $\Leftarrow$la variable sortante de la base

A la première itération, nous avons :

		$\Downarrow$					
	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	Z	80	60	0	0	0	0
	x_3	1	1	1	0	0	100
$\Leftarrow$	x_4	2	1	0	1	0	150
	x_5	5	10	0	0	1	800

			$\Downarrow$				
	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	Z	0	20	0	-40	0	6000
$\Leftarrow$	x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	25
	x_4	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	75
	x_5	0	$\frac{15}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	1	425

La seule variable à augmenter est x_2 (variable entrante). Son augmentation maximale est obtenue en considérant la première contrainte(variable sortante est x_3)

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	0	0	-40	-20	0	7000
x_2	0	1	2	-1	0	50
x_1	1	0	-1	1	0	50
x_5	0	0	-15	5	1	50

Tous les coefficients de l'objectif sont négatif, le processus s'arrête et la solution est :
$x_1 = 50$, $x_2 = 50$, $z = 7000$

7. Donner le simplexe sous forme matricielle

c = [80, 60]

$$B=I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$b^T = [100, 150, 800]$

$x^T = [x_1, x_2]$
$x_s^T = [x_3, x_4, x_5]$

le système peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} \max z = [\,80, 60, 0, 0, 0\,]\,[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^{\mathbf{T}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^{\mathbf{T}} = [100, 150, 800]^{\mathbf{T}} \end{cases}$$

8. Résoudre le simplexe en utilisant les logiciels (Excel et Scilab)