Optimisation Linéaire, TD n° 5.

* Problème du jardinier.

- A → 10
- B → 12
- C → 12

- P_1 → 5, 2, 1 ~ 3 $
- P_2 → 1, 2, 4 ~ 2 $

$$Z = \min(3x_1 + 2x_2)$$

$$\text{avec} \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12. \end{cases}$$

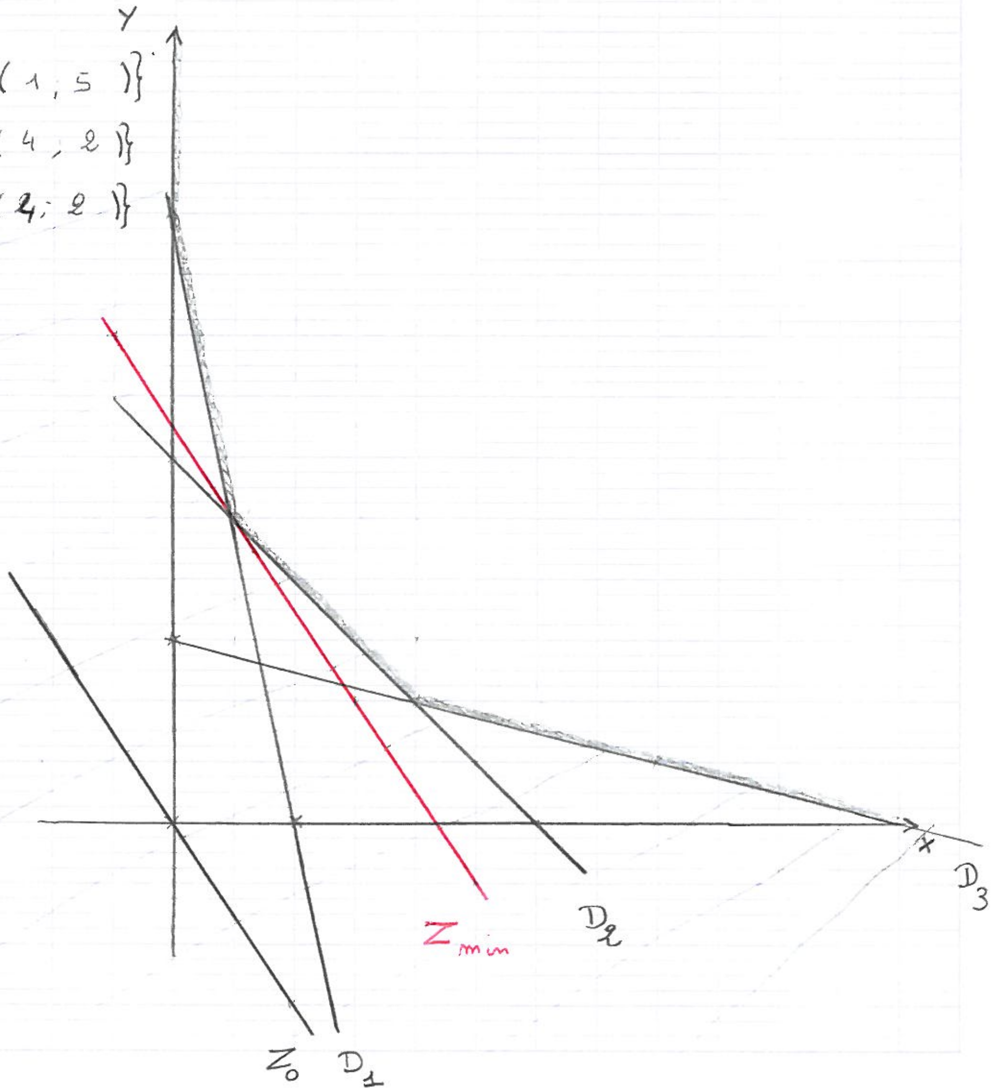
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1) Méthode géométrique

$5x_1 + x_2 = 10 \sim \{(2;0)(1;5)\}$

$2x_1 + 2x_2 = 12 \sim \{(3;3)(4;2)\}$

$x_1 + 4x_2 = 12 \sim \{(0;3)(4;2)\}$



Le min est atteint en $D_1 \cap D_2$:

$D_1 : 5x_1 + x_2 = 10 \Leftrightarrow x_2 = 10 - 5x_1$

$D_2 : x_1 + x_2 = 6 \Leftrightarrow x_2 = 6 - x_1$

$\Rightarrow D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

Alors le coût minimum vaut :

$Z = 1 * 3\$ + 5 * 2\$$

$= 13\$$

2) On a :

$$Z = \min(3x_1 + 2x_2)$$

avec $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \end{cases}$

Forme standard

$$Z = \min(3x_1 + 2x_2)$$

avec

$5x_1 + x_2 - x_3 = 10$

$2x_1 + 2x_2 - x_4 = 12$

$x_1 + 4x_2 - x_5 = 12$

Base non réalisable car $\begin{cases} x_3 = -10 \\ x_2 = -12 \\ x_3 = -12 \end{cases}$

Il faut ajouter des variables artificielles !!!

Nouvelle forme standard avec pénalités

$$W_M = 3x_1 + 2x_2 + M(x_1^a + x_2^a + x_3^a)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_1^a = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_2^a = 12 \\ x_1 + 4x_2 - x_5 + x_3^a = 12 \end{cases}$$

$$\rightarrow W_M = 3x_1 + 2x_2 + M\big((10 + x_3 - x_2 - 5x_1) + (12 + x_4 - 2x_2 - 2x_1) + (12 + x_5 - 4x_2 - x_1)\big)$$

$$= x_1(3 - 5M - 2M - M) + x_2(2 - M - 2M - 4M) + 34M + Mx_3 + Mx_4 + Mx_5$$

$$= x_1(3 - 8M) + x_2(2 - 7M) + 34M + Mx_3 + Mx_4 + Mx_5$$

1er Tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a	W_M	S_M
$-(8M-3)$	$-(7M-2)$	M	M	M	0	0	0	-1	$-34M$
5	1	-1	0	0	1	0	0	0	10
2	2	0	-1	0	0	1	0	0	12
1	4	0	0	-1	0	0	1	0	12

* Base réalisable mais non optimale car $\tilde{C}_1 < \tilde{C}_2 < 0$.

→ chgmt de base :

- variable entrante : x_1
- variable sortante :

$$\begin{cases} 5\theta + x_1^a = 10 \\ 2\theta + x_2^a = 12 \\ \theta + x_3^a = 12 \end{cases} \rightarrow \tilde{\theta} = \min_{x \geq 0} \left(\frac{10}{5} ; \frac{12}{2} ; \frac{12}{1} \right)$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} = 2$$

x_1^a variable sortante.

→ Chgmt de base

$$l_1 \leftarrow (8M-3) \cdot \frac{l_2}{5} + l_1$$

$$l_2 \leftarrow \frac{l_2}{5}$$

$$l_3 \leftarrow -2 \cdot \frac{l_2}{5} + l_3$$

$$l_4 \leftarrow -\frac{l_2}{5} + l_4$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a	W_M	SM
0	$-\frac{27M}{5}+\frac{7}{5}$	$-\frac{3M}{5}+\frac{3}{5}$	M	M	$\frac{8M-3}{5}$	0	0	-1	-18M-6
1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	2
0	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$	-1	0	$-\frac{2}{5}$	1	0	0	8
0	$\frac{18}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	-1	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	10

3) Passage au Dual

Primal : $\begin{cases} \min(3x_1 + 2x_2) \\ 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Dual : $\begin{cases} \max(10u_1 + 12u_2 + 12u_3) \\ 5u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 3 \\ u_1 + 2u_2 + 4u_3 \leq 2 \\ u_1 \geq 0 ;\ u_2 \geq 0 ;\ u_3 \geq 0 \end{cases}$

* Forme standard

$$Z = \max(10u_1 + 12u_2 + 12u_3)$$

avec $\begin{cases} 5u_1 + 2u_2 + u_3 + x_1 = 3 \\ u_1 + 2u_2 + 4u_3 + x_2 = 2 \\ u_i \geq 0 ;\ x_i \geq 0 \end{cases}$

1er Tableau

u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	W_M	S_M
-10	-12	-12	0	0	-1	0
5	2	1	1	0	0	3
1	2	4	0	1	0	2

--> Base réalisable mais non optimale :
$\bar{C}_2 \leq \bar{C}_3 < \bar{C}_1 < 0$

=> il faut faire un chgmt de base.

* variable entrante : u_2
* variable sortante : x_2

$$\begin{cases} 2\theta + x_1 = 3 \\ 2\theta + x_2 = 2 \end{cases} ; \quad \tilde{\theta} = \min_{\pi \geq 0} \left(\frac{3}{2} ; \frac{2}{2} \right)$$

=> variable sortante : x_2

↦ $l_1 \leftarrow 12 \dfrac{l_3}{2} + l_1$

↦ $l_2 \leftarrow -2 \cdot \dfrac{l_3}{2} + l_2$

↦ $l_3 \leftarrow \dfrac{l_3}{2}$

u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	Z	SM
-4	0	12	0	6	-1	12
4	0	-3	1	-1	0	1
$\frac{1}{2}$	1	2	0	$\frac{1}{2}$	0	1

Base réalisable mais non optimale :
$\overline{C}_1 < 0$

=> il faut faire un chgmt de base.

* variable entrante : u_1
* variable sortante : x_1

$$\begin{cases} 4\theta + x_1 = 1 \\ \frac{\theta}{2} + u_2 = 1 \end{cases} ; \quad \tilde{\theta} = \min_{\pi \geq 0} \left(\frac{1}{4} ; 2 \right)$$

=> variable sortante : x_1

$\mapsto \mathcal{L}_1 \leftarrow 4 \cdot \frac{\mathcal{L}_2}{4} + \mathcal{L}_1$

$\mapsto \mathcal{L}_2 \leftarrow \frac{\mathcal{L}_2}{4}$

$\mapsto \mathcal{L}_3 \leftarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{L}_2}{4} + \mathcal{L}_3$

u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	Z	SM
0	0	9	1	5	-1	13.
1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	1	$\frac{19}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{7}{8}$

* Ccl

1) La solut° optimale donne un coût de 13 \$

2) Pour trouver les valeurs des x_i qui donnent la solut°: ce sont les valeurs des coûts marginaux des variables d'écarts

$x_1 = \overline{C_1}$

$x_2 = \overline{C_2}$