E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

Optimisation Linéaire T.D.1
le 24 janvier 2012

(Introduction à la modélisation et la résolution géometrique des problèmes linéaires aux contraintes inegalités.
Initiation aux tableaux du simplexe.)

1

Représenter graphiquement l'ensemble des points M de coordonnées $(x,\ y)$, vérifiant les systèmes suivants :

$$a = \left\{ \begin{array}{c} 2x + 4y \leq 10 \\ 3x - 4y \geq 2 \\ x + y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$b = \left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + y \leq 9 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$c = \left\{ \begin{array}{c} |x + 2y| \leq 6 \\ |x - 2y| \geq 2 \end{array} \right\}$$

2

Optimiser par la méthode géométrique du simplexe :

$$\max(Z = x + 3y)$$

$$\text{avec les contraintes : } \left\{ \begin{array}{c} 2x + 5y \leq 10 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

3

Déterminer par la méthode géométrique :

1. Le minimum de (2x+3y)
2. Le maximum de (2x+3y)

sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y \geq 0 \\ x - y \leq 3 \\ x - y \geq -5 \end{array} \right\}$$

4

Un fleuriste dispose de 50 lys , 80 roses et 80 jonquilles. Il réalise ou bien des bouquets, qu'il vend 40 Euros comprenanant 10 lys , 10 roses et 20 jonquilles,

ou bien des bouquets dont il tire un prix de 50 euros comprenant 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles.

Comment le fleuriste doit-il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ?

5

Optimiser par la méthode géométrique du simplexe :

$$\max(Z = 10x_1 + 30x_2)$$

$$\text{avec les contraintes : } \left\{ \begin{array}{c} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

Optimisation Linéaire T.D.2
le 31 janvier 2012
(Introduction à la modélisation et la résolution géometrique des problèmes linéaires aux contraintes inegalités.
Initiation aux tableaux du simplexe.)

1

Optimiser par la méthode géométrique et la méthode des tableaux du simplexe :

$$\max(Z = x_1 + 2x_2)$$

$$\text{avec les contraintes : } \left\{ \begin{array}{c} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

2

Optimiser par la méthode géométrique et la méthode des tableaux du simplexe :

(i)

$$\max(Z = x_1 + x_2/2)$$

$$\text{avec les contraintes : } \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - (x_2/2) \leq 1 \\ \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

(ii)

$$\max(Z = 10x_1 + 20x_2)$$

$$\text{avec les contraintes : } \left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 + 4x_2 \leq 64 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 110 \\ \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

Optimisation Linéaire T.D.3
le 7 février 2012
(Introduction à la modélisation et la résolution géometrique des problèmes linéaires.
Initiation aux tableaux du simplexe, et la méthode des pénalités)

1

Un investisseur doit choisir parmi les 2 types d'actifs **Ilog** et **BNP-Paribas**. L'action **Ilog** a une espérance de gain de 80 Euros et l'action **BNP-Paribas** 60 euros.

L'investisseur ne peut acheter au total que 100 actions et compte dépenser au plus 800 Euros.

L'action **Ilog** coûte 5 Euros et l'action **BNP-Paribas** 10 Euros.

L'achat des actions se fait d'autre part via une banque qui touche une commission de 2 Euros par action de **Ilog** et 1 Euro par action **BNP-Paribas**. L'investisseur ne veut pas dépasser 150 Euros de commissions.

Combien d'actions de chaque type l'investisseur doit acheter pour maximiser ses revenus futurs ?

Modéliser et résoudre ce problème d'optimisation linéaire par la méthode géometrique et la méthode des tableaux du simplexe.

2

Pour les deux problèmes suivants montrer pourquoi l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début. En utilisant la méthode des pénalités établir le 1^{er} tableau du simplexe ayant une base réalisable :

i) (P.0.1)

$$\min(W = x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_1 \geq 0 \quad \forall\, i = 1,2,3 \end{array} \right\}$$

ii) (P.0.2)

$$\min(Z = x_1 - 2x_2)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ x_1 \geq 0 \quad \forall\, i = 1,2 \end{array} \right\}$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
Optimisation Linéaire T.D.4
le 14 février 2012
(Introduction à la modélisation et a résolution des problèmes linéaires, par la méthode Géometrique ei celle des tableaux du Simplexe
Méthode des Pénalités et méthode de Dualité)

Une compagnie américaine possède deux mines d'or, A et B, dont les productions journalières sont données par le tableau suivant (unité : 1 tonne).

Qualité	Mine A	Mine B
Haute	1	2
Moyenne	3	2
Basse	5	2

La compagnie a besoin de : 80 tonnes d'or de haute qualité, 160 tonnes d'or de qualité moyenne et 200 tonnes d'or de basse qualité. Les entrepreneurs de la compagnie, s'interrogent sur le nombre de jours que chacune des mines doit fonctionner, si le coût journalier de la production est de 200 dollars pour la mine A et de 200 dollars pour la mine B.

– i. Formaliser mathématiquement ce problème d'optimisation. Donner la solution du primal en programmation linéaire par la méthode géométrique. Interpréter votre résultat.
– ii. Etablir le premier tableau de la méthode du simplexe, ayant une base réalisable. Résoudre le problème des mines d'or par la méthode des pénalités.
– iii. Etablir le problème dual du i). Résoudre ce nouveau problème par l'algorithme du simplexe.

Rappel : tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
$\min(Z = cx)$	$\max(W = ub)$
$Ax = b \quad x > 0$ A= matrice des contraintes	$(uA)^T \leq c^T$ A^T (transp. de A) matr. des contr.
Contrainte $i : \geq$	Variable $u_i \geq 0$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtreqless 0$
Contrainte $i : \leq$	Variable $u_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtreqless 0$	Contrainte $j : =$

– iv. Comparer la solution du dual obtenue en iii. avec la solution du primal du i. Montrer la cohérence de vos résultats par application du théorème de dualité et du principe de complémentarité. Comment pourrait-on obtenir la solution du primal directement par la procédure détaillée faite dans le dual ? Justifier votre réponse.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
Optimisation Linéaire T.D.5
le 6 mars 2012

Introduction à la modélisation et la résolution des problèmes linéaires.
Méthode Géometrique ; méthode des tableaux du Simplexe ; méthode des Pénalités ; méthode de Dualité ; programmation linéaire en nombre entiers.

Rappel : tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
$\min(Z = cx)$	$\max(W = ub)$
$Ax = b \quad x > 0$ A= matrice des contraintes	$(uA)^T \leq c^T$ A^T (transp. de A) matr. des contr.
Contrainte $i : \geq$	Variable $u_i \geq 0$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtreqless 0$
Contrainte $i : \leq$	Variable $u_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtreqless 0$	Contrainte $j : =$

1

Un jardinier Californien a besoin de 10, 12, et 12 unités d'éléments chimiques A, B, C respectivement pour son jardin. Un produit liquide contient 5, 2, et 1 unités d'éléments A, B, C respectivement par litre, alors qu'un produit solide contient 1, 2, 4, unités de A, B, C respectivement par carton.

Si le produit liquide se vend au prix de 3 dollars par litre et le produit solide au prix de 2 dollars par carton, on étudie quelle serait la meilleure solution pour que le jardinier minimise son coût.

i) Formaliser mathématiquement ce problème d'optimisation. Donner la solution du primal en programmation linéaire par la méthode géometrique. Interpréter votre résultat.
Montrer pourquoi l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début.

ii) Etablir le problème dual du i). Résoudre ce nouveau problème par l'algorithme du simplexe.

iii) Comparer la solution du dual obtenue en (ii) avec la solution du primal du (i). Montrer la cohérence de vos résultats par application du théorème de dualité et du principe de complémentarité. Comment pourrait-on obtenir la solution du primal directement par la procédure détaillée faite dans le dual ? Justifier votre réponse.

2

Soit le problème d'optimisation

$$\min(Z = -10x_1 - 11x_2)$$

(P) avec $\left\{ \begin{array}{c} 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \text{ et entiers } \forall i = 1, 2 \end{array} \right\}$

Le tableau ci-dessous est le dernier tableau du simplexe qui fournit la solution optimale du problème continu.

x_1	x_2	x_3	Z	s.m
0	1	1	-1	59
1	12/10	1/10	0	59/10

a) Est-ce-que c'est une solution réalisable pour le problème (P) ?
Donner deux ou trois nouveaux tableaux du simplexe par application de l'algorithme des coupes qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez-vous en conclure déjà ?

b) Porter sur un graphique les contraintes correspondant aux coupes engendrées par l'algorithme, (après élimination de la variable d'écart) sur le plan (x_1, x_2), et trouver le point correspondant à l'optimum entier.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
Optimisation Linéaire T.D.6
le 12 mars 2012

Introduction à la modélisation et la résolution des problèmes linéaires.
Méthode Géometrique ; méthode des tableaux du Simplexe ; méthode des Pénalités ; méthode de Dualité. Méthode des coupes (Programmation en nombres entiers)

Rappel : tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
$\min(Z = cx)$	$\max(W = ub)$
$Ax = b \quad x > 0$ A= matrice des contraintes	$(uA)^T \leq c^T$ A^T (transp. de A) matr. des contr.
Contrainte $i : \geq$	Variable $u_i \geq 0$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtreqless 0$
Contrainte $i : \leq$	Variable $u_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtreqless 0$	Contrainte $j : =$

1

Etablir le dual du problème d'optimisation suivant :

$$\max(F = x_1 + 2x_2)$$

(P) avec $\left\{ \begin{array}{c} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

a)

Pour le problème nouveau dans l'espace dual montrer pourquoi l'algorithme des tableaux du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début.

Appliquer une autre méthode pour réaliser cet algorithme, trouver la solution par cette méthode.

b) Appliquer les principes de complémentarité et de dualité pour donner la solution du problème primal.

c) Résoudre le problème primal par la méthode géometrique et la méthode des tableaux du simplexe.

Appliquer les principes de complémentarité et de dualité pour donner la solution du problème dual. Commenter vos résultats et montrer leur cohérence.

2

On considère le problème suivant

$$\max(F = 7u_1 + 12u_2 + 10u_3)$$

$$\text{(D) avec} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \leq 0 \\ 3u_1 - 2u_2 - 4u_3 \leq 1 \\ -u_1 + 4u_2 + 3u_3 \leq -3 \\ u_2 \leq 0 \\ 2u_1 + 8u_3 \leq 2 \\ u_3 \leq 0 \end{array} \right\}$$

Il s'agit du dual d'un problème primal dont la solution est :

$$\min(Z) = -11 \; \{0, 4, 5, 0, 0, 11\}$$

Trouver u_1, u_2, u_3 vérifiant le principe de complémentarité (Principe d'exclusion). Vérifier le théorème de Dualité.

3

Une entreprise de vêtements doit maximiser son profit donné par la fonction :

$$Z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

où x_1, x_2 représentent les valeurs entières d'utilité de deux produits différents et qui doivent satisfaire aux contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_i \in \mathbf{N} \quad i = 1, 2 \end{array} \right\}$$

Par la méthode de programmation linéaire du "simplexe", on obtient comme dernier tableau qui fournit la solution optimale du problème continu, le tableau suivant.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	s.m
0	0	0	1/2	1/2	-1	19/2
0	1	0	3/8	1/8	0	27/8
1	0	0	-1/4	1/4	0	11/4
0	0	1	-3/2	1/2	0	21/6

i) Cette solution serait-elle une solution réalisable pour le problème actuel ?
Donner deux nouveaux tableaux du simplexe (application de la méthode des coupes) qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ?

ii) Porter sur un graphique les contraintes correspondant aux coupes engendrées par l'algorithme, (après élimination de la variable d'écart) sur le plan (x_1, x_2), et trouver le point correspondant à l'optimum entier.

– iii) Etablir le problème dual du problème précédent.
Trouver sa solution, en utilisant le théorème de Dualité et une des deux formes du principe de complémentarité.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
Optimisation Linéaire T.D.7
le 19 mars 2012

Révisions : Méthode Géometrique ; méthode des tableaux du Simplexe ; méthode des Pénalités ; méthode de Dualité
Programmation en nombres entiers (Méthodes des coupes)

1

1). Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode géometrique du simplexe :

$$\textbf{(P.1)} \qquad \max_{x_1,x_2}\{Z = 8x_1 + x_2\}$$
$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

2). Etablir le problème dual du problème précédent.
(voir tableau des correspondances)

- i) Montrer pourquoi l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début. Utiliser la **méthode des pénalités** pour établir **un premier tableau** de base réalisable.
- ii) Trouver la solution de ce problème Dual, en utilisant le théorème de **Dualité** et une **des deux formes du principe de complémentarité**.

Tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
Fonction Obj. (min)	Second membre
Second membre	Fonction Obj. (max)
A= matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
Contrainte $i : \leq$ $(i : \geq)$	Variable $u_i \leq 0$ $(u_i : \geq 0)$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtreqless 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtreqless 0$	Contrainte $j : =$

2 Programmation en Nombres Entiers

On considère le problème suivant :

$$\textbf{(P.2)} \qquad \max_{x_1,x_2}\{Z = 8x_1 + x_2\}$$
$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ x_1 \in \mathbf{N},\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

Par la méthode des tableaux du "simplexe", on obtient comme dernier tableau qui fournit la solution optimale du problème **(P.1)**, le tableau suivant : (Comparer ce résultat avec votre solution géometrique du 1.))

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W	s.m
0	5/3	0	0	4/3	-1	28
0	2/3	1	0	-1/6	0	3/2
0	4/3	0	1	1/6	0	7 /2
1	2/6	0	0	1/6	0	21/6

1. . Cette solution serait-elle une solution optimale pour le problème **(P.2)** ?
2.
   En exigeant **que** x_1 **soit entier** trouver deux nouveaux tableaux du simplexe (application de la méthode des **coupes**) qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ? Attention ! : **Se limiter seulement à une coupe.**

   ii) Porter sur le graphique de votre solution géometrique du 1). (sur le plan (x_1, x_2)) la contrainte correspondant à la coupe engendrée par l'algorithme, (après élimination des variables d'écart).
   Comparer votre nouveau domaine de solutions avec celui du 1), et trouver le sommet du simplexe correspondant à l'optimum pour x_1 entier.

3 (Formalisation)

Vous exploitez un élevage de caribous, et vous cherchez à optimiser les coûts associés à leur alimentation.

Un diététicien expert vous informe que pour qu'ils demeurent en santé, ces animaux doivent avoir une alimentation contenant une certaine dose de **sel**, de **sucre** de **gras** et de **basilic**. L'industrie alimentaire des caribous, fabrique deux aliments contenant ces composants : le **Royal-Caribou**, et le **Kebab-Caribou**. Dans les faits :

- $1kg$ de **Royal- Caribou** contient $100g$ de sel, $100g$ de gras et $200g$ de basilic.
- $1kg$ de **Kebab-Caribou** contient $100g$ de sucre, $200g$ de gras et $100g$ de basilic.
- Un caribou doit consommer au moins par jour : $0,4kg$ de sel, $0,6kg$ de sucre, $2kg$ de gras et $1,7kg$ de basilic
- Le **Royal- Caribou** coûte 10 euros le kg et le **Kebab-Caribou** coûte 4 euros le kg

On veut connaitre les quantités de **Royal- Caribou** et de **Kebab-Caribou** à utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse.

1) Formaliser le problème. S'agit-il d'un problème de programmation linéaire ? Justifier votre réponse.
2) Peut-on envisager une résolution graphique de ce problème ? Si oui, effectuer cette résolution. ■

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
Optimisation Linéaire T.D.8
le 27 mars 2012

Révisions : Méthode Géometrique ; méthode des tableaux du Simplexe ; méthode des Pénalités ; méthode de Dualité
Programmation en nombres entiers (Méthodes des coupes ou des congruences décroissantes)

1

1). Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode géometrique du simplexe :

$$\max_{x_1,x_2}\{Z = -3x_1 + x_2\}$$

(P.1)
$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} -4x_1 + 10x_2 \leq 25, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

2). Etablir le problème dual du problème précédent.

(voir tableau des correspondances)

- i) Montrer pourquoi l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début. Utiliser la **méthode des pénalités** pour établir **un premier tableau** de base réalisable.
- ii) Trouver la solution de ce problème Dual, en utilisant le théorème de **Dualité** et les **deux formes du principe de complémentarité** Commenter vos résultats.

Tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
Fonction Obj. (min)	Second membre
Second membre	Fonction Obj. (max)
A= matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
Contrainte $i : \leq$ $(i : \geq)$	Variable $u_i \leq 0$ $(u_i : \geq 0)$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtreqless 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtreqless 0$	Contrainte $j : =$

2 Programmation en Nombres Entiers

On considère le problème suivant :

$$\textbf{(P.2)} \qquad \max_{x_1,x_2}\{Z = -3x_1 + x_2\} \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} -4x_1 + 10x_2 \leq 25, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbf{N}. \end{array} \right\}$$

Par la méthode des tableaux du "simplexe", on obtient comme dernier tableau qui fournit la solution optimale du problème **(P.1)**, le tableau suivant : (Comparer ce résultat avec votre solution géometrique du 1.))

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W	s.m
26/10	0	1/10	0	0	-1	25/10
-4/10	1	1/10	0	0	0	25/10
24/10	0	-1/10	1	0	0	75/10
16/10	0	1/10	0	1	0	85/10

1. Cette solution serait-elle une solution optimale pour le problème **(P.2)** ?
2. En exigeant **que** x_2 **soit entier** trouver deux nouveaux tableaux du simplexe (application de la méthode des **coupes**) qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ? Attention ! : **Se limiter seulement à une coupe.**

   ii) Porter sur le graphique de votre solution géometrique du 1) (sur le plan (x_1, x_2)) la contrainte correspondant à la coupe engendrée par l'algorithme, (après élimination des variables d'écart).
   Comparer votre nouveau domaine de solutions avec celui du 1), et trouver le sommet du simplexe correspondant à l'optimum pour x_1 entier.

3 Modélisation

Les besoins minimaux en vitamines d'une personne soucieuse de sa bonne santé sont de : 7 unités de vitamine A, 5 unités de vitamine C et 2 unités de vitamine D.

Les commerces proposent deux produits pouvant répondre à ces besoins :

- La marque 1, qui coûte 4 euros, apporte 2 unités de vitamine A, 3 de vitamine C et 3 de vitamine D.
- La marque 2, qui coûte 2 euros, apporte 4 unités de vitamine A, 1 de vitamine C et 5 de vitamine D.

On souhaite connaître la combinaison la moins coûteuse de ces deux marques qui répond aux besoins.

1) Formaliser le problème. S'agit-il d'un problème de programmation linéaire ? Justifier votre réponse.

2) Peut-on envisager une résolution graphique de ce problème ? Si oui, effectuer cette résolution. ■