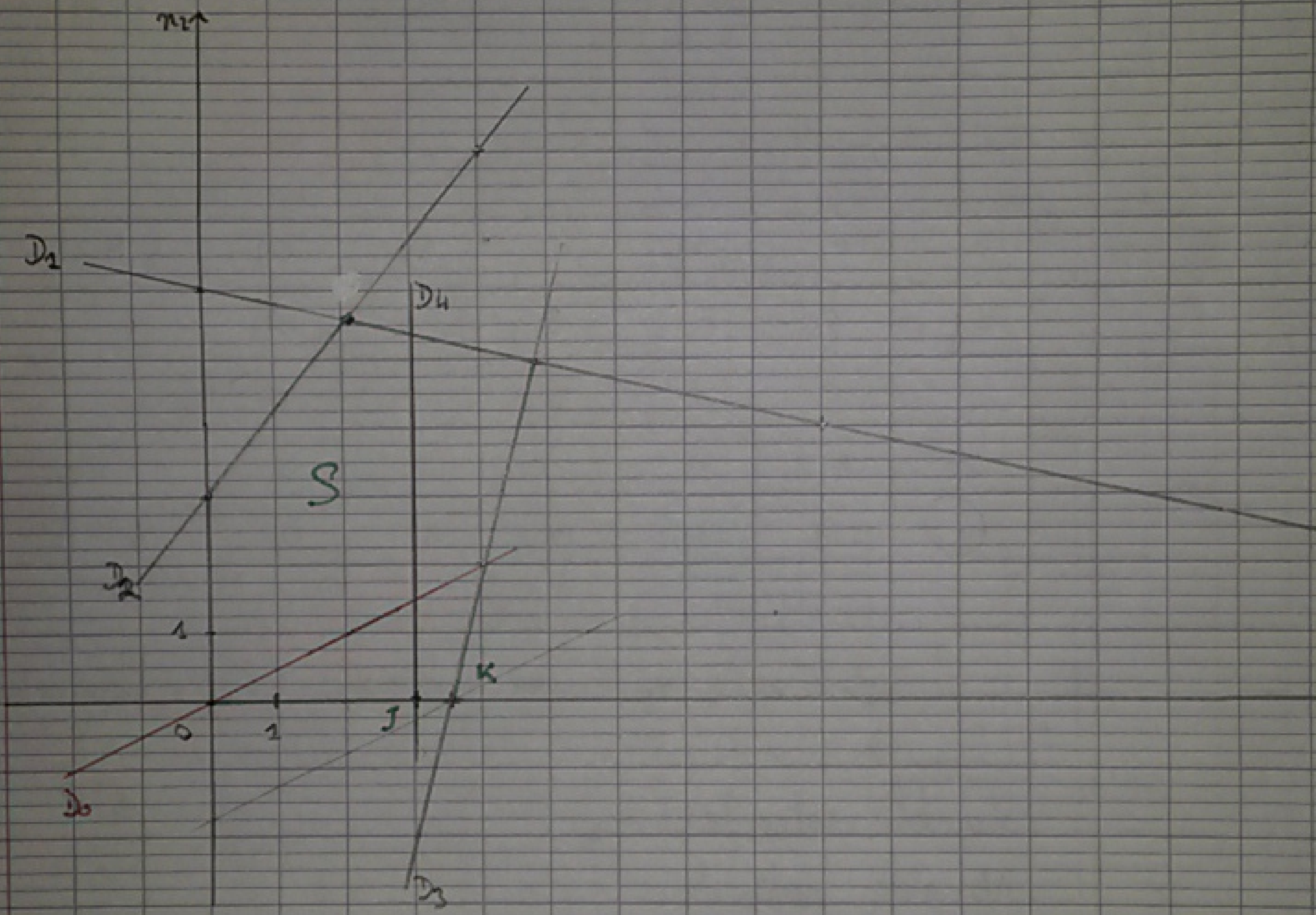
Ex 1 :

D_1 : $2x_1 + 9x_2 = 54$. $A_1 = (9, 4)$ $B_1 = (0, 6)$

D_2 : $-5x_1 + 4x_2 = 12$. $A_2 = (0, 3)$. $B_2 = (4, 8)$

D_3 : $4x_1 - x_2 = 14$. $A_3 = (4, 2)$. $B_3 = (3, -2)$

D_0 : $x_1 - 2x_2 = 0$. $A_0 = (0, 0)$. $B_0 = (2, 1)$



$K = (Ox_1) \cap D_3$

$\begin{cases} x_2^* = 0 \\ 4x_1^* - x_2^* = 14 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_2^* = 0 \\ x_1^* = \frac{7}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow K = (\frac{7}{2}, 0)$ et $z^* = \frac{7}{2} - 2 \times 0 = \frac{7}{2}$

Méthode des tableaux:

$\max\{Z = x_1 - 2x_2\} \equiv \min\{w = -Z = -x_1 + 2x_2\}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + x_3 = 54 \\ -5x_1 + 4x_2 + x_4 = 12 \\ 4x_1 - x_2 + x_5 = 14 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	SM
-1	2	0	0	0	-1	0
2	9	1	0	0	0	54
-5	4	0	1	0	0	12
4	-1	0	0	1	0	14

$B_0 = (x_3, x_4, x_5)$ non optimale $(\bar{C}_1 = -1 < 0)$

Variable entrante: x_1

Variable sortante:

On cherche $\hat{\theta}$ qui minimise les contraintes de x_1:

$$\begin{cases} 2\theta + 9x_2 + x_3 = 54 \\ -5\theta + 4x_2 + x_4 = 12 \\ 4\theta - x_2 + x_5 = 14 \end{cases}$$

or $x_2 = 0$ (hors base)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta + x_3 = 54 \\ -5\theta + x_4 = 12 \\ 4\theta + x_5 \, 14 \end{cases}$$

$\hat{\theta} = \min\left(\frac{54}{2} ; \frac{14}{4}\right) = \frac{14}{4}$

$\Rightarrow$ Variable sortante: x_5.

$\mathcal{L}_4' = \frac{\mathcal{L}_4}{4}$; $\mathcal{L}_1' = \frac{\mathcal{L}_4}{4} + \mathcal{L}_1$; $\mathcal{L}_2' = -\frac{\mathcal{L}_4}{2} + \mathcal{L}_2$; $\mathcal{L}_3' = \frac{5}{4}\mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_3$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W	S.M
0	$7/4$	0	0	$1/4$	-1	$7/2$
0	$19/2$	1	0	$-1/2$	0	47
0	$11/4$	0	1	$5/4$	0	$59/2$
1	$-1/4$	0	0	$1/4$	0	$7/2$

Base : $B_1 = (x_1, x_3, x_4)$ optimale ($\bar{C}_i \geq 0,\ \forall i \in [\![1;5]\!]$)

$x_1^* = \frac{7}{2}$; $x_2^* = 0$ (hors base) ; $W^* = \frac{7}{2}$.

Dual:

$\min\{W = 54u_1 + 12u_2 + 14u_3\}$

avec $\begin{cases} 2u_1 - 5u_2 + 4u_3 \geq 1 \\ 9u_1 + 4u_2 - u_3 \geq -2 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases}$

$\max\{Z = x_1 - 2x_2\}$

avec $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \leq 54 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 4x_1 - x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2u_1 - 5u_2 + 4u_3 - u_4 = 1 \\ 9u_1 + 4u_2 - u_3 - u_5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2u_1 + 5u_2 - 4u_3 + u_4 = -1 \\ -9u_1 - 4u_2 + u_3 + u_5 = 2 \end{cases}$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	W	S.M
54	12	14	0	0	-1	0
-2	5	-4	1	0	0	-1
-9	-4	1	0	1	0	2

La base $B_0 = (u_4, u_5)$ n'est pas réalisable

$\Rightarrow$ on ne peut pas appliquer appliquer l'algorithme du simplexe.

Méthode des pénalités:

$\min \{ W = 54u_1 + 12u_2 + 14u_3 \}$

avec : $\begin{cases} 2u_1 - 5u_2 + 4u_3 - u_4 + u_1^a = 1 \\ -9u_1 - 4u_2 + u_3 + u_5 = 2 \end{cases}$

où $u_1^a = -2u_1 + 5u_2 - 4u_3 + u_4 + 1$

$W = 54u_1 + 12u_2 + 14u_3 + Mu_1^a \; ; \; M \gg 1.$

$\Leftrightarrow W = 54u_1 + 12u_2 + 14u_3 + M(-2u_1 + 5u_2 - 4u_3 + u_4 + 1)$

$\Leftrightarrow W = (54 - 2M)u_1 + (12 + 5M)u_2 + (14 - 4M)u_3 + Mu_4 + M$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_1^a	W	SM
54-2M	12+5M	14-4M	M	0	0	-1	M
2	-5	4	-1	0	1	0	1
-9	-4	1	0	1	0	0	2

ii) Th. dualité $W^* = 7/2$ $\qquad z^* = 7/2$

Th. complémentarité

$x_1^* = \frac{7}{2}$ contrainte saturée $2u_1 - 5u_2 + 4u_3 = 1$

$x_2^* = 0$ contrainte non-saturée $9u_1 + 4u_2 - u_3 > -2$

Sens inverse car pas assez d'informations

$2x_1^* + 9x_2^* = 7 < 54$ contrainte non saturée $u_1^* = 0$

$-5x_1^* + 4x_2^* = -\frac{35}{2} < 12$ contrainte non-saturée $u_2^* = 0$

$4x_1^* - x_2^* = 14$ contrainte saturée $u_3^* > 0$

$W^* = 54u_1^* + 12u_2^* + 14u_3^* = \frac{7}{2} = 14u_3^*$

$\Rightarrow u_3^* = \frac{1}{4}.$

1) En comparant avec le dernier tableau de l'exo 1, on obtient bien le même tableau.
Cette solution n'est pas optimale car $x_1^* = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$

2) $x_1 - \frac{x_2}{4} + \frac{x_5}{4} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{7}{2} + \frac{x_2}{4} - \frac{x_5}{4} = \frac{14}{4} + \frac{x_2}{4} - \frac{x_5}{4} \in \mathbb{N}$

Congruences décroissantes
$\Leftrightarrow -x_2 + x_5 \equiv 14[4] \equiv 2[4]$

Meilleure coupe : $-x_2 + x_5 \geq 2$
Nouvelle variable d'écart x_6 / $-x_2 + x_5 - x_6 = 2$
$\Leftrightarrow x_2 - x_5 + x_6 = -2$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	W	S.M
0	7/4	0	0	1/4	0	-1	7/2
0	19/2	1	0	-1/2	0	0	47
0	11/4	0	1	5/4	0	0	59/2
1	-1/4	0	0	1/4	0	0	7/2
0	1	0	0	-1	1	0	-2

La base $B_0 = (x_1, x_3, x_4, x_6)$ n'est pas primal-réalisable, mais elle est dual-réalisable.

Variable sortante : x_6
Variable entrante :
$\hat{\theta} = \min_{j \in S} \left\{ -\frac{c_j}{f_j} \right\} = -\frac{c_p}{f_p}$, $f_j < 0$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \min\left(-\frac{1/4}{-1} \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow$ variable entrante : x_5

$\mathcal{L}_5' = -\mathcal{L}_5$, $\mathcal{L}_1' = \frac{\mathcal{L}_5}{4} + \mathcal{L}_1$; $\mathcal{L}_2' = -\frac{\mathcal{L}_5}{2} + \mathcal{L}_2$; $\mathcal{L}_3' = \frac{5}{4}\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_3$; $\mathcal{L}_4' = \frac{\mathcal{L}_5}{4} + \mathcal{L}_4$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w	SM
0	2	0	0	0	1/4	-1	3
0	9	1	0	0	-1/2	0	48
0	4	0	1	0	5/4	0	27
1	0	0	0	0	1/4	0	3
0	-1	0	0	1	-1	0	2

On a donc : $\begin{cases} x_2^* = 0 \quad \text{(hors base)} \\ x_1^* = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow z^* = x_1^* - 2x_2^* = 3$

) Graphique :

$-x_2 + x_5 \geq 2$ et $x_5 = 14 - 4x_1 + x_2$

$\Rightarrow -x_2 + 14 - 4x_1 + x_2 \geq 2$

$\Rightarrow -4x_1 \geq -12$

$\Rightarrow x_1 \leq 3$

$D_4 : x_1 = 3$. $A_4 = (3, 0)$. $B_4 = (3, 1)$

$S = D_4 \cap (Ox_1)$

$\Rightarrow S = (3, 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 0 \end{cases}$ et $z^* = 3 - \cancel{2}0 = 3$

De plus, on a bien $x_1^* \in \mathbb{N}$ et $x_2^* \in \mathbb{N}$.

Exo 3 :

i) $\min\{W = 100x_1 + 400x_2\}$

avec : $\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 11 \\ x_1 + 5x_2 \geqslant 23 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$

ii) C'est un problème de programmation linéaire car le coût à minimiser ainsi que les contraintes sont des fonctions linéaires

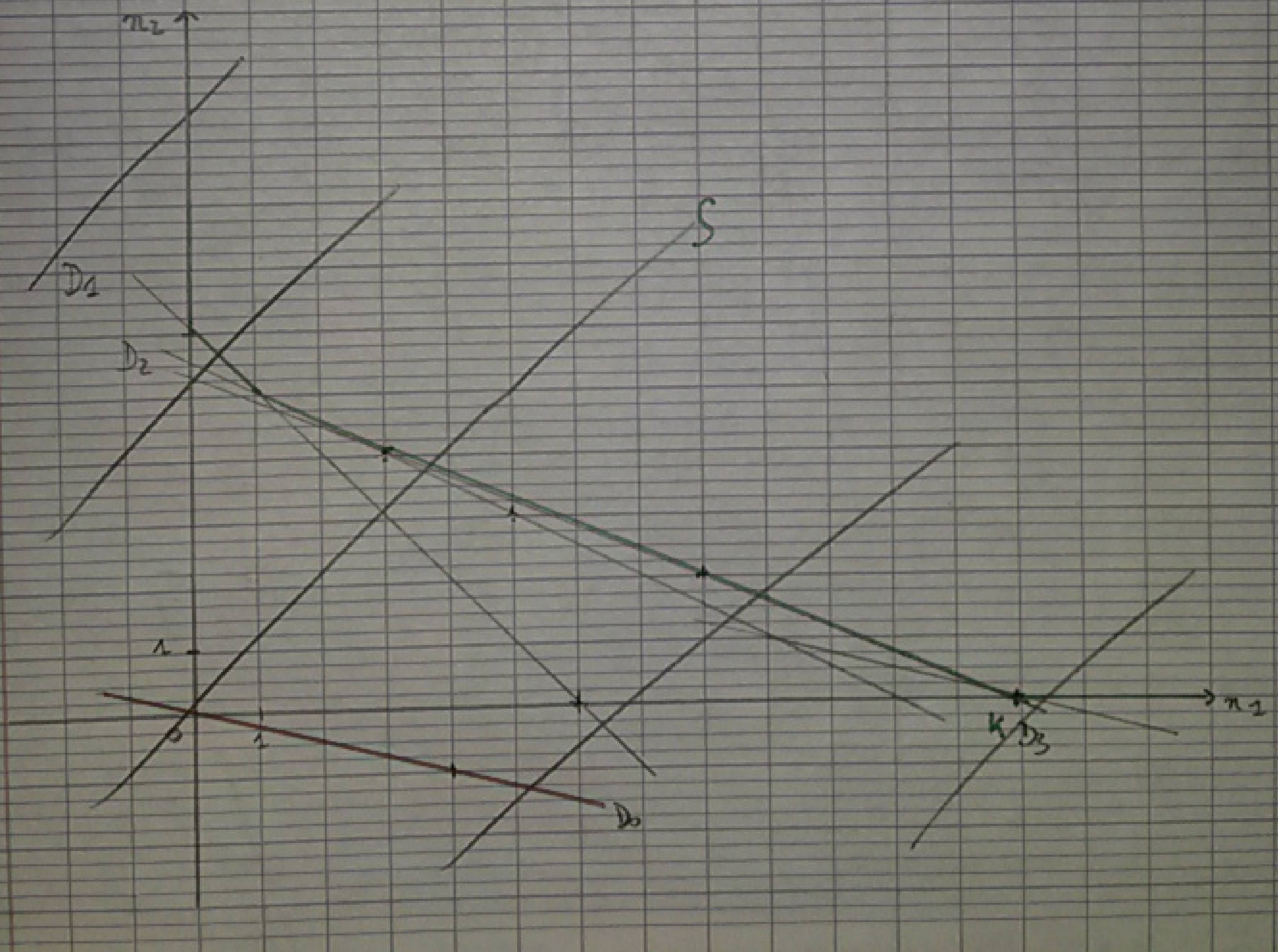
iii) Il y a deux variables x_1 et x_2 => on peut le résoudre par la méthode géométrique.

D_1 : $x_1 + x_2 = 6$. $A_1 = (0,6)$. $B_1 = (6,0)$.

D_2 : $x_1 + 2x_2 = 11$. $A_2 = (5,3)$. $B_2 = (3,4)$

D_3 : $x_1 + 5x_2 = 23$. $A_3 = (3,4)$. $B_3 = (8,3)$.

D_0 : $100x_1 + 400x_2 = 0$. $A_0 = (0,0)$. $B_0 = (4,-1)$



$K = D_2 \cap D_3$

$$\begin{cases} x_1^* + 2x_2^* = 11 \\ x_1^* + 5x_2^* = 23 \end{cases} \Rightarrow 3x_2^* = 12 \Rightarrow x_2^* = 4$$

$$\Rightarrow x_1^* + 2 \times 4 = 11 \Rightarrow x_1^* = 3$$

$\Rightarrow K = (3,4)$ et $W^* = 100 \times 3 + 400 \times 4 = 1900$

L'industriel doit utiliser 3 facteurs X_1 et 4 facteurs X_2 pour minimiser ~~son~~ coût qui sera de 1900 €.