E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
Optimisation Linéaire
Devoir surveillé n^o 1 donné le 8-06-2010
(Durée 2h.)
(Aucun document , ni calculatrice sont autorisés)

1 METHODE DU SIMPLEXE-PENALITES- DUALITE (8 Pts)

1). Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode géometrique du simplexe :

$$\textbf{(P.1)} \qquad \max_{x_1,x_2}\{Z = 8x_1 + x_2\} \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

2). Etablir le problème dual du problème précédent.

(voir tableau des correspondances)

- i) Montrer pourquoi l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début. Utiliser la **méthode des pénalités** pour établir **un premier tableau** de base réalisable.
- ii) Trouver la solution de ce problème Dual, en utilisant le théorème de **Dualité** et une **des deux formes du principe de complémentarité**.

Tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
Fonction Obj. (min)	Second membre
Second membre	Fonction Obj. (max)
A= matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
Contrainte $i : \leq$ $(i : \geq)$	Variable $u_i \leq 0$ $(u_i : \geq 0)$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtrless 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtrless 0$	Contrainte $j : =$

2 Programmation en Nombres Entiers (8 Pts)

On considère le problème suivant :

$$\textbf{(P.2)} \qquad \max_{x_1,x_2}\{Z = 8x_1 + x_2\} \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ x_1 \in \mathbf{N},\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

Par la méthode des tableaux du "simplexe", on obtient comme dernier tableau qui fournit la solution optimale du problème **(P.1)**, le tableau suivant : (Comparer ce résultat avec votre solution géometrique du 1.))

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W	s.m
0	5/3	0	0	4/3	-1	28
0	2/3	1	0	-1/6	0	3/2
0	4/3	0	1	1/6	0	7 /2
1	2/6	0	0	1/6	0	21/6

1. **(3Pts)**. Cette solution serait-elle une solution optimale pour le problème **(P.2)** ?
2. **(5Pts)**

   En exigeant **que x_1 soit entier** trouver deux nouveaux tableaux du simplexe (application de la méthode des **coupes**) qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ? Attention ! : **Se limiter seulement à une coupe.**

   ii) Porter sur le graphique de votre solution géometrique du 1). (sur le plan (x_1, x_2)) la contrainte correspondant à la coupe engendrée par l'algorithme, (après élimination des variables d'écart).
   Comparer votre nouveau domaine de solutions avec celui du 1), et trouver le sommet du simplexe correspondant à l'optimum pour x_1 entier.

3 FORMALISATION (4 Pts)

Vous exploitez un élevage de caribous, et vous cherchez à optimiser les coûts associés à leur alimentation.

Un diététicien expert vous informe que pour qu'ils demeurent en santé, ces animaux doivent avoir une alimentation contenant une certaine dose de **sel**, de **sucre** de **gras** et de **basilic**. L'industrie alimentaire des caribous, fabrique deux aliments contenant ces composants : le **Royal-Caribou**, et le **Kebab-Caribou**. Dans les faits :

- $1kg$ de **Royal- Caribou** contient $100g$ de sel, $100g$ de gras et $200g$ de basilic.
- $1kg$ de **Kebab-Caribou** contient $100g$ de sucre, $200g$ de gras et $100g$ de basilic.
- Un caribou doit consommer au moins par jour : $0,4kg$ de sel, $0,6kg$ de sucre, $2kg$ de gras et $1,7kg$ de basilic
- Le **Royal- Caribou** coûte 10 euros le kg et le **Kebab-Caribou** coûte 4 euros le kg

On veut connaitre les quantités de **Royal- Caribou** et de **Kebab-Caribou** à utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse.

1) Formaliser le problème. S'agit-il d'un problème de programmation linéaire ? Justifier votre réponse.
2) Peut-on envisager une résolution graphique de ce problème ? Si oui, effectuer cette résolution. ■