E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
Optimisation Linéaire
Devoir surveillé n^o 1.a (Rattrapage) donné le 30-06-2010
(Durée 2h.)
(Aucun document , ni calculatrice sont autorisés)

1 METHODE DU SIMPLEXE-PENALITES- DUALITE (8 Pts)

1). Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode géometrique du simplexe :

$$\textbf{(P.1)} \qquad \max_{x_1,x_2}\{Z = 6x_1 - x_2\} \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} 7x_1 - 2x_2 \leq 14, \\ x_2 \leq 4, \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

2). Etablir le **problème Dual** du problème précédent.
(voir tableau des correspondances)
- i) Montrer pourquoi pour ce problème Dual, l'algorithme du simplexe ne peut pas s'appliquer dès le début. Utiliser la **méthode des pénalités** pour établir **un premier tableau** de base réalisable.
- ii) Trouver la solution de ce problème Dual, en utilisant le théorème de **Dualité** et une **des deux formes du principe de complémentarité**.

Tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
Fonction Obj. (min)	Second membre
Second membre	Fonction Obj. (max)
A= matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
Contrainte $i : \leq$ $(i : \geq)$	Variable $u_i \leq 0$ $(u_i : \geq 0)$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtrless 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtrless 0$	Contrainte $j : =$

2 Programmation en Nombres Entiers (8 Pts)

On considère le problème suivant :

$$(\mathbf{P.2}) \qquad \max_{x_1,x_2}\{Z = 6x_1 - x_2\} \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} 7x_1 - 2x_2 \leq 14, \\ x_2 \leq 4, \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ x_1 \in \mathbb{N},\ x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

Par la méthode des tableaux du "simplexe", on obtient comme dernier tableau qui fournit la solution optimale du problème **(P.1)**, le tableau suivant : (Comparer ce résultat avec votre solution géometrique du 1.))

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W	s.m
0	0	6/7	5/7	0	-1	104/7
0	1	0	1	0	0	4
0	0	-2/7	10/7	1	0	33 /7
1	0	1/7	2/7	0	0	22/7

1. **(3Pts)**. Cette solution serait-elle une solution optimale pour le problème **(P.2)** ?
2. **(5Pts)**
   En exigeant **que x_1 soit entier** trouver deux nouveaux tableaux du simplexe (application de la méthode des **coupes**) qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ? Attention ! : **Se limiter seulement à une coupe.**
   ii) Porter sur le graphique de votre solution géometrique du 1). (sur le plan (x_1, x_2)) la contrainte correspondant à la coupe engendrée par l'algorithme, (après élimination des variables d'écart).
   Comparer votre nouveau domaine de solutions avec celui du 1), et trouver le sommet du simplexe correspondant à l'optimum pour x_1 entier.

3 Modélisation (4 Pts)

Les besoins minimaux en vitamines d'une personne soucieuse de sa bonne santé sont de : 7 unités de vitamine A, 5 unités de vitamine C et 2 unités de vitamine D.

Les commerces proposent deux produits pouvant répondre à ces besoins :

- La marque 1, qui coûte 4 euros, apporte 2 unités de vitamine A, 3 de vitamine C et 3 de vitamine D.
- La marque 2, qui coûte 2 euros, apporte 4 unités de vitamine A, 1 de vitamine C et 5 de vitamine D.

On souhaite connaître la combinaison la moins coûteuse de ces deux marques qui répond aux besoins.

1) Formaliser le problème. S'agit-il d'un problème de programmation linéaire ? Justifier votre réponse.
2) Peut-on envisager une résolution graphique de ce problème ? Si oui, effectuer cette résolution. ■