OPTIMISATION LINEAIRE

Support du cours de 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2011-2012

Table des matières

Liste des figures

Chapitre 1

SIMPLEXE: La méthode des tableaux - Méthode Géometrique

Problème $(P.O)$ (Problème initial d'optimisation)

Minimiser (ou maximiser) $f(x)$ sous les contraintes:

$$\left\{\begin{array}{lcll} g_i(x) & = & 0 & i \in I^0 \quad \subset \mathbb{N} \\ g_j(x) & \leq & 0 & j \in I^- \quad \subset \mathbb{N} \\ g_k(x) & \geq & 0 & k \in I^+ \quad \subset \mathbb{N},\ x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x_i \geq 0 \end{array}\right.$$

et, où $f,\ g_{\ell(\ell \in I^0 \cup I^- \cup I^+)}$ sont des fonctions linéaires des "variables" x_1,x_2,$\cdots$,x_n ou des formes linéaires définies sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1 Forme standard

Problème $(P.1)$

$$\text{Minimiser}\left(z = c \cdot x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)$$

avec:

$$Ax = b; \quad x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \quad x_i \in \mathbb{R}^+$$

où
n = nombre de variables indépendantes
m = nombre de contraintes.
$A \in \mathcal{M}(n, m)$, matrice des coefficients des contraintes;
$c = (c_1, c_2\ \ldots,\ c_n)$ vecteur ligne ($\in \mathbb{R}^n$) des coûts.
$b = (b_1, \cdots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ vecteur colonne des 2^{mes} membres.
$z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \Leftrightarrow$ fonction à minimiser ou **"fonction objectif"**.

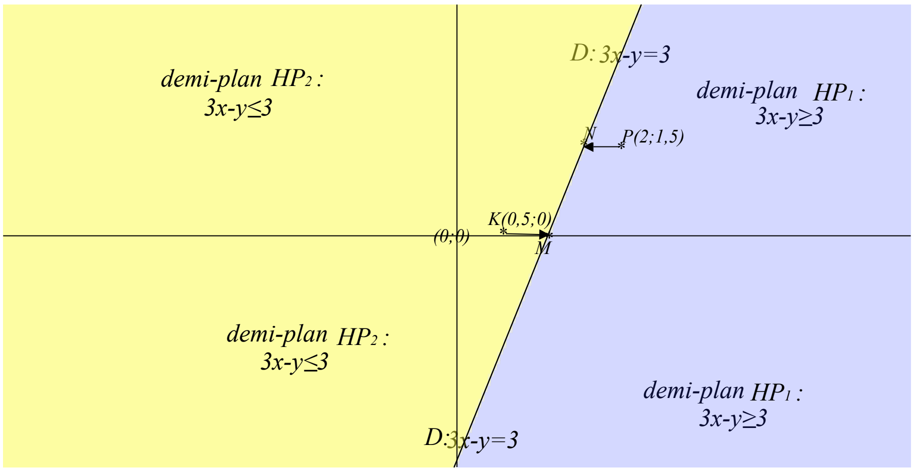

FIG. 1.1: Le point $P(2;1,5) \in HP_1$ a été déplacé par soustraction d'une "variable d'écart positive" à la position N sur la ligne D. Par analogie, le point $K(0,5;0) \in HP_2$ a été déplacé par addition d' "une variable d'écart positive" à la position M sur la ligne D.

Proposition 1.1. *Forme standard*

*Un problème $(P.0)$ peut toujours se mettre sous **forme standard** $(P.1)$ (contraintes égalités) par l'outil des "**variables d'écart**" (variables supplémentaires).*
*(**attention aux signes !!**)*

Sur la figure 1.1 on représente graphiquement le rôle des variables d'écart (dans le cas de deux inégalités aux sens opposés).

Exemple 1.1.

$$\max(f = \overline{-5x_1 + 3x_2}^{(P.O)}) \qquad \text{Forme standard } (P.1) \quad \min(z = 5x_1 - 3x_2)$$

$$\textit{avec} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \textit{avec} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, \ \ \forall\, i = 1,2,3,4 \\ \textit{avec: } (x_3, x_4) \textit{ variables d'écart} \end{cases}$$

Remarque 1.1.

On suppose par la suite que $rgA = m$

2 Base réalisable -Base optimale

Définition 1.1.

***Polytope convexe**: $X = \{x | Ax = b, \ x \geq 0\}$*
*$\Leftrightarrow$ **Simplexe***
*<u>Polytope borné</u> $\Leftrightarrow$ **Polyèdre convexe***

Définition 1.2.

*x **Point extrême** de X*

$\Leftrightarrow$
x ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire d'autres points de X.

Définition 1.3.
Base *: toute sous matrice $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de A qui a le même rang que la matrice A:*

$$rgA = rgB = m$$

donc :

$$A = [B, N] \text{ et } BX_B + NX_N = b$$

*où X_B $\Leftrightarrow$ l'ensemble des **"variables (vecteurs) de base"** et*
*X_N $\Leftrightarrow$ l'ensemble des **variables (vecteurs)"hors base"***

Définition 1.4.
Solution de base *: Elle est obtenue en posant $X_N = 0$*

$$\Rightarrow BX_B = b \Rightarrow X_B = B^{-1}b$$

Définition 1.5.
Soit B, base de $(P.1)$
Base réalisable *: si $X_B \geq 0$ ou si $B^{-1}b \geq 0$*

Théorème 1.1.

(i) L'ensemble des points extrêmes d'un polytope convexe X

$$\Leftrightarrow$$

L'ensemble de solutions de bases réalisables.

*(ii) L'**optimum de** z est atteint en au moins 1 point extrême de X.*

Théorème 1.2.

*(i) Une Base de (P.1) est une **base réalisable optimale***

ssi

$$\bar{C}_N = C_N - C_B B^{-1} \geq 0$$

*($\bar{C}_N$ $\equiv$ **vecteur ligne des coûts réduits des variables hors base**).*

(ii) Si B est une base réalisable quelconque, soit x_0 la solution correspondante.
*Si $\exists\, x_h \in X_N$ hors base t.q. $\bar{c}_h < 0$ alors ou bien optimum = $-\infty$ ou bien on met en évidence une autre base $\hat{B}$ (**changement de base** (v. aussi Th.correspondant cours 1^{re} année Algèbre Ch.1) réalisable ayant comme solution correspondante $\hat{x}$ t.q*

$$z(\hat{x}) < z(x_0)$$

Remarque 1.2. Voir plus loin fig. 1.2 la représentation sous forme de "tableau" de tous ces vecteurs et matrices du simplexe.

3 Le tableau du simplexe

La méthode des tableaux du simplexe permet d'appliquer toutes les étapes de l'algorithme du simplexe sous forme d'une sequence de tableaux représentés par la figure 1.2.

Cette sequence converge vers la solution optimale lue sur le **dernier tableau** d'après le critère (i) du Théorème 1.2.

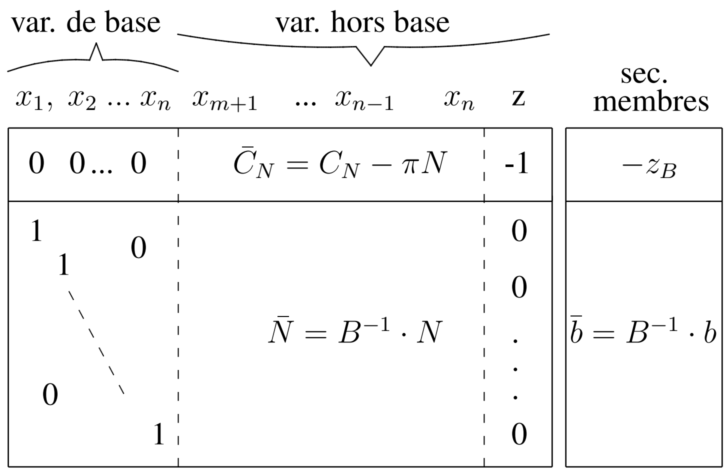

FIG. 1.2: Schéma d'un tableau du simplexe à une étape k de l'algorithme

4 L'algorithme du simplexe $\Leftrightarrow$ la sequence des tableaux

On présente l'algorithme du simplexe (tel qu'on le retrouve dans toutes les références récentes (v. listes des références de la section 3)). Nous mettons parallèlement en évidence (entre parenthèse) son application directe sur la construction des **tableaux successifs**, du type de la figure 1.2.

Avant d' appliquer l'algorithme on doit mettre le problème d'optimisation sous forme standard avec tous les seconds membres $b_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, 2 \ldots, m$ et parallèlement avoir établi le premier tableau du simplexe sous la forme décrite par la figure précédente (v. fig. 1.2).

Soit B_0 une base réalisable de départ.

D'après cette hypothèse le tableau ci-dessus donne au départ $\bar{N} = N$, et $\bar{b} = b$.

Etapes de l' algorithme "primal" du simplexe

(a) B_0 *base réalisable de départ. Itération* $k = 0$.

($\Leftrightarrow$ 1^{er} **tableau du simplexe** et lecture de la solution de base réalisable B_0)

(b) $k \leftarrow k + 1$

($\Leftrightarrow$ **Nouveau tableau** après changement de base)

(c) *à l'itération* k *soit* B *la base et* $x = [x_B, x_N]$ *la solution correspondante. Calculer: (v. fig.* 1.2)

$$\left\| \begin{array}{rcl} \bar{b} & = & B^{-1} b \\ \pi & = & C_B B^{-1} \\ \bar{C}_N & = & C_N - \pi N \end{array} \right.$$

($\Leftrightarrow$ **Lecture sur le nouveau tableau** de la solution de base et du vecteur de coûts réduits $\bar{C}_N$)

(d) (1) *Si* $\bar{C}_N \geq 0, STOP$: *l'optimum est atteint.*
($\Leftrightarrow$ **Application du critère (i)** Th.1.2 du vec. de coûts réduits $\bar{C}_N$)

(2) *Si* $\exists\, x_e \in X_N$ t.q. $\bar{c}_e < 0$ *alors*
($\Leftrightarrow$ **Application du critère (ii)** Th.1.2)

(e) *Soit* A_e *la colonne* $|e|$ *de A. Calculer* $\bar{A}_e = B^{-1}A_e$;

si $\bar{a}_{ie} \leq 0 \;\; \forall\, i = 1, \cdots, m$ *STOP: optimum non borné* $(-\infty)$
sinon calculer : $\hat{\vartheta} = \hat{b}_s / \hat{a}_{se} = \min\limits_{\bar{a}_{ie} > 0} \{\bar{b}_i / \bar{a}_{ie}\}$
$\Leftrightarrow$

Changement de base (sous-étape A) :

Variable entrante x_e t.q. $\bar{c}_e \leq \bar{c}_j \; \forall\, j = 1, 2 \ldots, n$

Variable sortante:

-Sur la colonne de x_e écrire le système d'équations de toutes les (contraintes)-lignes du tableau t.q. $\bar{a}_{ie} > 0$

ATTENTION!!! *seulement* les variables de base, *doivent contribuer à ce système d'équations.*

-Evaluer le minimum des rapports des seconds membres avec les coefficients correspondants:

$$\hat{\vartheta} = \frac{\hat{b}_s}{\hat{a}_{se}} = \min_{\bar{a}_{ie} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}} \right\}$$

La variable de base qui correspond à ce **minimum** $\dfrac{\hat{b}_s}{\hat{a}_{se}}$ sera la variable sortante.

-Si ce minimum n'existe pas (car $\bar{a}_{ie} \leq 0 \; \forall i = 1, 2 \ldots, m$ alors le tableau sera le dernier et la solution n'existe pas (minimum $-\infty$).)

(f) Soit x_s la variable de base correspondant à la $s^{\text{ième}}$ ligne de la base (et qui a fournit le minimum $\hat{\vartheta}$ de l'étape précédente), alors :

$$B^{-1}A_e = \hat{e}_s = s^{\text{ième}} \text{ ligne } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_s \\ x_e \end{array} \right.$$

avec: x_s variable sortante de la base

et: x_e variable entrante dans la base

Calcul de l'inverse de la nouvelle base et retour en (b).

(Changement de base **sous étape B**):
-On détermine le **pivot** pour le changement de base:
C'est l'élément du tableau qui correspond à la **colonne de la variable entrante et la ligne de la variable sortante:** $\hat{a}_{se}$

- On applique l' échelonnage: (V. cours Ch.1 Algèbre) sur les lignes du dernier tableau,

$$\left\| \begin{array}{c} L'_s = \dfrac{L_s}{\bar{a}_{se}} \\ \text{et} \\ \forall\, i = 1, 2 \ldots m+1 \quad \text{avec } m \neq s \\ L'_i = -\bar{a}_{ie} L'_s + L_i \end{array} \right.$$

et on obtient le nouveau tableau qui correspond à la nouvelle base,

et qui est le retour à l'étape b) de l'algorithme.)

5 Intérêt des "tableaux du simplexe"

L'algorithme devient plus commode avec l'usage des
"Tableaux du simplexe"1.2 car:

(1) La solution de base s'obtient par lecture directe : sur chaque ligne i du tableau (correspondant à la variable de base x_i^B) on lit $\underline{x_i^B = \bar{b}_i}$

(v.fig.1.2).

(2) La valeur $\underline{z_B}$ de la fonction objectif est contenue dans la case en haut et à droite du tableau (avec le signe -) (v.fig. 1.2)

(3) Les composantes du vecteur des coûts réduits des variables hors-base $\bar{C}_N$ sont obtenues par lecture directe de la première ligne du tableau de simplexe. Elles permettent en particulier de voir immédiatement si la solution de base courante est optimale. (rappel: il faut $\bar{C}_j \geq 0\ \forall x_j$ hors base d'après le théorème 1.2)

1 Exemple d'application de la méthode de Dantzig par les tableaux successifs du simplexe

Soit le problème d'optimisation

$$\max(z = 8x_1 + 5x_2)$$

$$\text{avec :} \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 6x_2 & \leq & 30 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 + 6x_2 & \leq & 42 \\ x_1 \geq 0 & ; & x_2 \geq 0 \end{array} \right\} (P.0)$$

Etape ((O)) : Forme standard

$$\min(w = -z = -8x_1 - 5x_2)$$

$$\text{avec :} \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + 6x_2 + x_3 & = & 30 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 & = & 15 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_5 & = & 42 \\ \text{où } x_1 \geq 0 \text{ ; } \quad i & = & 1, 2, \cdots 5 \end{array} \right\} (P.1)$$

$\boxed{x_3, x_4, x_5}$ variables d'écart.

Etape ((1)) : 1^{er} tableau du simplexe

V. hors Base   Var. de Base

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	Second Membre	
-8	-5	0	0	0	-1	0	(L_1)
3	6	1	0	0	0	30	(L_2)
3	1	0	1	0	0	15	(L_3)
5	6	0	0	1	0	42	(L_4)

Base B_0

Base initiale réalisable :

$$B_0 = \{x_3; x_4; x_5\}$$

Solution de Base B_0

$$\left. \begin{array}{rcl} \tilde{x}_3 & = & 30 \\ \tilde{x}_4 & = & 15 \\ \tilde{x}_5 & = & 42 \\ \tilde{x}_1 & = & 0 \text{ car hors base} \\ \tilde{x}_2 & = & 0 \text{ car hors base} \end{array} \right\} \text{et } \underline{w = 0}$$

Mais ! cette solution n'est pas optimale car:

$$\underset{-8}{\bar{C}_1 < 0} \quad \text{et} \quad \underset{-5}{\bar{C}_2 < 0}$$

Il faut changer la base :

a) variable “entrante” x_1

b) variable “sortante” ?

(trouver $\hat{\vartheta}$ qui minimise les contraintes de x_1)

$$\boxed{\text{Attention } x_2 = 0 \text{ toujours car il est hors base}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\vartheta + 6\times 0 + x_3 & = & 30 \\ 3\vartheta + 0 + x_4 & = & 15 \\ 5\vartheta + 0 + x_5 & = & 42 \end{array}\right. \left|\begin{array}{lcl} \Leftrightarrow \quad \hat{\vartheta} & = & \min_{r\geq 0}\{\frac{30}{3};\frac{15}{3};\frac{42}{5}\} \\ \Rightarrow \quad \hat{\vartheta} & = & 5 \end{array}\right.$$

$$3\times 5 + x_4 = 15 \iff \underline{x_4 = 0}$$
$$\Rightarrow x_4 \text{ variable “sortante”}$$

* Nouvelle base : $\underline{B_1 = \{x_1; x_3; x_5\}}$
* Ecrire le tableau du simplexe explicité par rapport à B_1.
Opérations sur les lignes du $\mathbf{1}^{er}$ tableau;

(il faut retrouver la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui correspond à B_1)

$\Rightarrow$ Echelonnage
* Pivot : l’élément de la colonne (x_1) qui correspond à la ligne (L_3) (car x_4 sort !)
donc :

$$\begin{array}{rcll} L'_3 & = & L_3/3 & \text{(pour avoir 1 à } (x_1)) \\ L'_1 & = & 8L_3/3 + L_1 & \text{(pour avoir 0 à } (x_1)) \\ L'_2 & = & -L_3 + L_2 & \text{(pour avoir 0 à } (x_1)) \\ L'_4 & = & -\dfrac{5}{3}L_3 + L_4 & \text{(pour avoir 0 à } (x_1)) \end{array}$$

2^{me} tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	Second Membre	
0	-7/3	0	8/3	0	-1	40	(L'_1)
0	5	1	-1	0	0	15	(L'_2)
1	1/3	0	1/3	0	0	5	(L'_3)
0	13/3	0	-5/3	1	0	17	(L'_4)

Base$B_1 = \{x_3; x_1; x_5\}$
Solution de Base B_1

$$\left.\begin{array}{rcl} \tilde{x}_3 & = & 15 \\ \tilde{x}_1 & = & 5 \\ \tilde{x}_5 & = & 17 \\ \tilde{x}_4 & = & 0 \text{ car hors base} \\ \tilde{x}_2 & = & 0 \text{ car hors base} \end{array}\right\} \text{ et } \underline{w = -40}$$

Mais ! cette solution n’est pas optimale car le coût réduit:

$$\bar{C}_2 = -\frac{7}{3} < 0$$

Il faut changer la base :

a) variable “entrante” x_2

b) variable “sortante” ?

(trouver $\hat{\vartheta}$ qui minimise les contraintes de x_2)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5\vartheta + x_3 + 0x_4 &=& 15 \\ x_1 + \vartheta/3 + 0x_3 + 0x_4 &=& 5 \\ 0x_1 + 13/3\,\vartheta + 0x_4 + x_5 &=& 17 \end{array}\right.$$

$$\Big| \Leftrightarrow \hat{\vartheta} = \min_{r \geq 0}\{\frac{15}{5}; 5 \times 3; \frac{17 \times 3}{13}\} = \frac{15}{5} = 3$$

$$3 \times 5 + x_3 = 15 \iff \underline{x_3 = 0}$$
$$\Rightarrow x_3 \text{ variable “sortante”}$$

* Nouvelle base : $B_2 = (x_1; x_2; x_5)$
* Ecrire le tableau du simplexe explicité par rapport à B_2.
$\Rightarrow$ Echelonnage
* Pivot : l'élément de la colonne (x_2) qui correspond à la ligne (L_2) (car x_3 sort !)
<u>donc</u> :

$$\begin{array}{rcll} L'_2 &=& L_2/5 & \text{(pour avoir 1 à } (x_2)) \\ L'_1 &=& 7L_2/15 + L_1 & \text{(pour avoir 0 à } (x_2)) \\ L'_3 &=& -L_2/15 + L_3 & \text{(pour avoir 0 à } (x_2)) \\ L'_4 &=& -\dfrac{13}{15}L_2 + L_4 & \text{(pour avoir 0 à } (x_2)) \end{array}$$

<u>3ème tableau du simplexe</u>

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	Second Membre
0	0	7/15	11/5	0	-1	47
0	1	1/5	-1/5	0	0	3
1	0	-1/15	2/5	0	0	4
0	0	-13/5	-4/5	1	0	4

Solution de Base

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1^* &=& 4 \\ x_2^* &=& 3 \\ x_5 &=& 4 \\ \tilde{x}_4 &=& 0 \text{ car hors base} \\ \tilde{x}_3 &=& 0 \text{ car hors base} \end{array}\right\} \Rightarrow -w^* = z^* = 47$$

$$\Rightarrow$$

Solution optimale car : $\boxed{\bar{C}_i \geq 0 \ \forall i}$
Fin de l'algorithme.

2 Méthode Géometrique-Cas à 2 dimensions.

1 Méthode Graphique

On présente maintenanant la **méthode Géométrique** (ou **Graphique**) (à 2 dimensions) de la **Programmation linéaire** et comparaison avec la méthode algébrique dite des tableaux du simplexe étudiée précédemment.

Problème (P.O)

$$\max(z = 8x_1 + 5x_2)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + 6x_2 & \leq & 30 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 + 6x_2 & \leq & 42 \\ x_1 \geq 0\,;x_2 & \geq & 0 \end{array} \right\}$$

- a) Sur le plan $(0x_1x_2)$, on trace les droites qui correspondent aux contraintes du problème:

$$\begin{array}{ll} D_1 : 3x_1 + 6x_2 = 30 & (A_1(0;5); B_1(10;0)) \\ D_2 : 3x_1 + x_2 = 15 & (A_2(0;15); B_2(5;0)) \\ D_3 : 5x_1 + 6x_2 = 42 & (A_3(0;7); B_3(6;2)) \end{array}$$

- b) La région de l'ensemble des solutions (S) v.fig. **??** est obtenue en vérifiant si l'origine $O = (0, 0)$ satisfait ou pas, les contraintes du problème.

  CONSEIL: Hachurer les régions interdites!!!!

  Pour l'exemple présent le "simplexe" de la solution est défini par les sommets $\{O,\ A,\ K,\ B_2\}$ autrement dit: les "points extrêmes " du simplexe qui sont d'après le théorème 1.1 les solutions de bases réalisables.

- c) *Famille des droites parallèles à la fonction objectif :*

$$\underline{8x_1 + 5x_2 - z = 0}$$

On choisit le représentant pour $\underline{z = 0}$

$$8x_1 + 5x_2 = 0 : \underline{D_0} \left\{ \begin{array}{c} 0(0;0) \\ C(5;-8) \end{array} \right\}$$

La droite $D_{zmax} \parallel D_0$ passant par $\underline{K}$ fig.(1.3) (obtenue par translation parallèlement en elle même), maximise la fonction objectif z car elle a la plus grande ordonnée à l'origine parmi les droites parallèles à D_0 et

$$K = D_1 \cap D_2 \text{ donc :}$$
$$K(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ solution du système :}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 6x_2 = 30 \\ 3x_1 + x_2 = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{x}_1 = 4 \\ \bar{x}_2 = 3 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\underline{K(4;3)}$ sommet du "simplexe" OA_1KB_2 (v.fig. 1.3) solution des contraintes de (P.O).

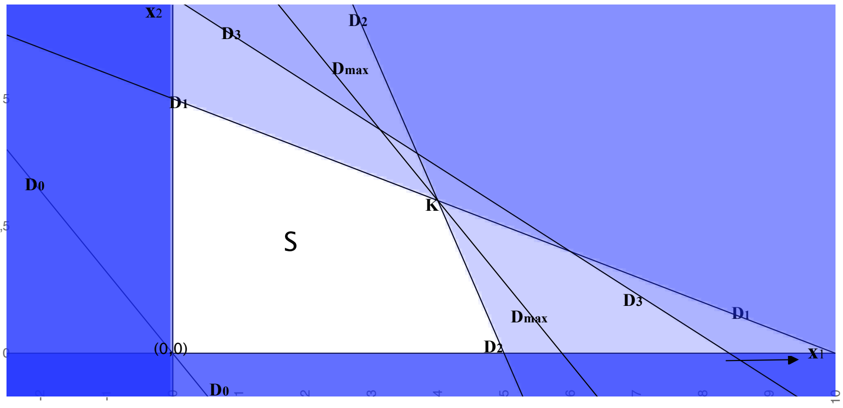

FIG. 1.3: La solution géometrique du simplexe: la “ région blanche” S de toutes les solutions possibles et la solution optimale le sommet $K(4;3)$.

2 Conclusions

a) $z_{max} = 8 \times 4 + 5 \times 3 = 32 + 15 = 47$
$\underline{z_{max} = 47}$ et $D_{zmax}\ :\ 8x_1 + 5x_2 = 47$
et ordonnée à l'origine de $D_{zmax}\ :\ x_2^0 = \dfrac{47}{5} = 9,4$ point $D(0;9,4)$ sur la figure **??**

b) La solution est évidemment la même obtenue par la méthode des tableaux du simplexe (v.section 1)

c) Le déplacement de la droite représentative D_0 (parallèlement en elle-même) d'un sommet du “simplexe” à l'autre représente géométriquement le changement de bases réalisables par la méthode des tableaux du simplexe (v.section 1) .

3 Références

a) G.DANTZIG

"Linear programming and Extensions"

Princeton, N.J.Princeton, University Press, 1963

b) R.FAURE

"Précis de Recherche Opérationnelle ",

Dunod (Paris 1979)

c) S.GASS

"Linear Programming: Méthods and Applications", 5^{th} edition New York : Mc Graw-Hill 1985

d) M. MINOUX (1975)

Programmation Mathématique (Dunod)

e) M. MINOUX (1975)

Programmation Linéaire
(Cours de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris)

f) C. PAPADIMITRIOU and K.STEIGLITZ

"Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity" Englewood Cliffs , N.J. Prentice-Hall 1982

g) A. W. TUCKER

Recent advances in Mathematical Programming
(Mc GRAW-HILL, New York)

g) W.L.WINSTON

" Operations Research: Applications and Algorithmes" PWS-KENT 1991