OPTIMISATION

1ère année ingénieurs

rachid.chelouah@eisti.fr

OPTIMISATION

- **Concepts de base: recherche opérationnelle**
- **Programmation linéaire**
- **Méthode du simplexe**
- **Logiciels (**Scilab, Solveur Excel, Solveur SAS, LINDO, Eclipse**)**
- **Variables artificielles et pénalités**
    - ✓ **Méthode du grand M**
    - ✓ **Méthode des 2 phases**
- **Dualité**
- **Programmation en nombres entiers**
- **Programmation en nombres binaires**
- **Heuristiques**
    - ✓ **Algorithmes génétiques**
    - ✓ **Algorithme de colonie de fourmis**
    - ✓ **Algorithme de recherche tabou**

DUALITÉ

PROBLÈME PRIMAL

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujet à

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m$$

et

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

PROBLÈME DUAL

$$\text{Min} \quad Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

sujet à

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} yi \geq cj \quad j = 1, \ldots, n$$

et

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

Dualité

- **À tout <u>problème de PL</u> on peut associer un autre problème PL, son dual** **le primal**
- **Le problème dual permet de donner une autre interprétation économique au problème primal**

Dualité

Exemple :

<u>régime alimentaire</u> :

- **6 produits alimentaires comme sources de vitamines A et C**

- **but : minimiser le coût du régime tout en satisfaisant la valeur nutritionnelle minimale de chaque vitamine**

Dualité

Exemple :

Valeurs nutritionnelles & coût par produit

produit (i) (unités/kg)	Produits						demande (unité)
	1	2	3	4	5	6	
vitamine A	*1*	*0*	*2*	*2*	*1*	*2*	*9*
vitamine C	*0*	*1*	*3*	*1*	*3*	*2*	*19*
prix par kg	*35*	*30*	*60*	*50*	*27*	*22*	

Dualité

Le modèle :

x_j = quantité consommée de chaque produit (en kg)

$$\min \quad z = 35\,x_1 + 30\,x_2 + 60\,x_3 + 50\,x_4 + 27\,x_5 + 22\,x_6$$

sc

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2\,x_3 + 2\,x_4 + x_5 + 2\,x_6 &\geq 9 \\ x_2 + 3\,x_3 + x_4 + 3\,x_5 + 2\,x_6 &\geq 19 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Dualité

Exemple : **une autre vision du problème**

producteur de cachets de vitamines synthétiques :

- **6 produits alimentaires contenant vitamines A et C**

- **but : être compétitif tout en maximisant son profit et en remplissant la demande**

Dualité

Exemple :

Prix maximum & composition de chaque produit

produit (i) (unité/kg)	*Produits*						*demande (unité)*
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
vitamine A	*1*	*0*	*2*	*2*	*1*	*2*	*9*
vitamine C	*0*	*1*	*3*	*1*	*3*	*2*	*19*
prix par kg	*35*	*30*	*60*	*50*	*27*	*22*	

par exemple, prix compétitif du produit 5 $\Rightarrow$ inférieur ou égal à 27

Dualité

Le modèle :

w_i = prix d'une unité de chaque vitamine

produit 5 = 1 unité de vitamine A + 3 unités de vitamine C

$$\Rightarrow \; w_1 + 3w_2 \leq 27$$

$$\max \quad v = 9\,w_1 + 19\,w_2$$

sc

$$\begin{aligned}
w_1 \qquad\qquad &\leq 35\\
w_2 &\leq 30\\
2\,w_1 + 3\,w_2 &\leq 60\\
2\,w_1 + \;\; w_2 &\leq 50\\
w_1 + 3\,w_2 &\leq 27\\
2\,w_1 + 2\,w_2 &\leq 22
\end{aligned}$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

Dualité

Primal

$$\min\ z = 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6$$

sc

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 &\geq 9 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 &\geq 19 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\max\ v = 9w_1 + 19w_2$$

sc

$$\begin{aligned} w_1 \phantom{{}+3w_2} &\leq 35 \\ w_2 &\leq 30 \\ 2w_1 + 3w_2 &\leq 60 \\ 2w_1 + w_2 &\leq 50 \\ w_1 + 3w_2 &\leq 27 \\ 2w_1 + 2w_2 &\leq 22 \\ w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dualité

Primal

cx

$$\min\ z = \boxed{35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6}$$

sc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 & \geq & 9 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 & \geq & 19 \end{array}}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$Ax \geq b$

Dual

wb

$$\max\ v = \boxed{9w_1 + 19w_2}$$

sc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} w_1 & \leq & 35 \\ w_2 & \leq & 30 \\ 2w_1 + 3w_2 & \leq & 60 \\ 2w_1 + w_2 & \leq & 50 \\ w_1 + 3w_2 & \leq & 27 \\ 2w_1 + 2w_2 & \leq & 22 \end{array}}$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

$wA \leq c$

DUALITÉ

			Primal Problem					
			Coefficient of:				Right Side	
			x_1	x_2	$\cdots$	x_n		
Dual Problem	Coefficient of:	y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leq b_1$	Coefficients for Objective Function (Minimize)
		y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leq b_2$	
		$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	
		y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leq b_m$	
		Right Side	$\geq c_1$	$\geq c_2$	$\cdots$	$\geq c_n$		
			Coefficients for Objective Function (Maximize)					

Dualité - Généralisation

Primal (P)	Dual (D)
$\min\ z = \underbrace{c}_{1\times n}\underbrace{x}_{n\times 1}$	$\max\ v = \underbrace{w}_{1\times m}b$
sc	sc
$\underbrace{A}_{m\times n}x \geq \underbrace{b}_{m\times 1}$	$wA \leq c$
$x \geq 0$	$w \geq 0$

Primal $\leftrightarrow$ Dual

Primal

$$\min \ z = cx$$

sc

$$Ax \leq b \Leftrightarrow (-A)\,x \geq -b$$

$$x \geq 0$$

Dual

$$\max \ v = w(-b) = (-w)b$$

sc

$$w(-A) \leq c \Leftrightarrow (-w)\,A \leq c$$

$$w \geq 0$$

$$-w \leftrightarrow w \quad \Rightarrow \quad \min \ v = wb$$

sc

$$wA \leq c$$

$$w \leq 0$$

Des **contraintes primales** du type $\leq$ correspondent à des **variables duales $w_i \leq 0$**

Primal $\leftrightarrow$ Dual

Primal

$$\min\ z = c\,x$$

sc

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Dual

$$\max\ v = \left(w^+ \mid w^-\right) \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

sc

$$\left(w^+ \mid w^-\right) \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq c \Leftrightarrow (w^+ - w^-)\,A \leq c$$

$$w \geq 0 \qquad\qquad w^+, w^- \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \min\ v = wb$$

sc

$$wA \leq c$$

w de signe quelconque

Des contraintes primales d'égalité $\sum a_{ij} x_j = b_i$ correspondent à des variables duales w_i de signe quelconque

Primal $\leftrightarrow$ Dual

Primal		Dual
$\min z = cx$	$\leftrightarrow$	$\max v = wb$
$i^{\text{ème}}$ contrainte	$\leftrightarrow$	$i^{\text{ème}}$ variable
$A_i\, x \geq b_i$	$\leftrightarrow$	$w_i \geq 0$
$A_i\, x \leq b_i$	$\leftrightarrow$	$w_i \leq 0$
$A_i\, x = b_i$	$\leftrightarrow$	w_i de signe quelconque
$j^{\text{ème}}$ variable	$\leftrightarrow$	$j^{\text{ème}}$ contrainte
$x_j \geq 0$	$\leftrightarrow$	$wA^j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$\leftrightarrow$	$wA^j \geq c_j$
$x_j \neq 0$ (de signe quelconque)	$\leftrightarrow$	$wA^j = c_j$

Propriétés de la dualité

1 - Le **dual** du **dual** est le **primal**

2 - Pour toute paire de solutions réalisables $\mathbf{x}$ de **P** et $\mathbf{w}$ de **D**, on a $\mathbf{cx} \geq \mathbf{wb}$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \text{ et } Ax \geq b \\ w \geq 0 \text{ et } wA \leq c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow w(Ax) \geq wb \\ \Rightarrow (wA)x \leq cx \end{array} \Bigg\} \; cx \geq (wA)x \geq wb$$

3 - Critère d'optimalité : $\mathbf{cx^*} = \mathbf{w^*b}$

sinon, $\mathbf{cx' < cx^*} = \mathbf{w^*b < w'b}$???

4 - Théorème Fondamental de la Dualité : si $\mathbf{x^*}$ et $\mathbf{w^*}$ sont les solutions optimales finies de **P** et **D**, respectivement, alors $\mathbf{z^*} = \mathbf{v^*}$.

En effet $\mathbf{z^*} = \mathbf{cx^*} = \mathbf{w^*b} = \mathbf{v^*}$.

Propriétés de la dualité

5 - <u>Théorème des écarts complémentaires</u> : pour toute paire de problèmes duaux, une CNS pour qu'une paire de solutions réalisables **x** de **P** et **w** de **D**, soit <u>une paire de solutions optimales</u> est que :

- **si une contrainte <u>i</u> de l'un des problèmes n'est pas saturée ou est lâche ($A_i x > b_i$), la variable correspondante du dual est <u>nulle</u>.**
- **si une variable de l'un des problèmes est <u>positive</u>, la contrainte correspondante du dual est "serrée" ($A_i x = b_i$).**

Propriétés de la dualité

- **Démonstration**

$$\left.\begin{array}{l} Ax \geq b \\ wA \leq c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow Ax - s = b \\ \Rightarrow wA + t = c \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} Ax \\ wA \end{array}}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow wAx - ws = wb \\ \Rightarrow \underline{wAx + tx = cx} \\ \quad tx + ws = cx - wb \end{array}$$

$$x \text{ et } w \text{ optimales} \Rightarrow cx - wb = 0 \Rightarrow tx + ws = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x, s, \\ w, x \end{array}\right\} \geq 0 \Rightarrow tx = ws = 0$$

tx, ws $\rightarrow$ somme de produits de variables <u>non-négatives</u>

$$t_i\, x_i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_i > 0 \Rightarrow x_i = 0 \\ x_i > 0 \Rightarrow t_i = 0 \end{cases}$$

$$w_i\, s_i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_i > 0 \Rightarrow w_i = 0 \\ w_i > 0 \Rightarrow s_i = 0 \end{cases}$$

Analyse de sensibilité

Etude de l'intervalle de variations des c_j et des b_i pour lesquelles la solution optimale courante reste optimale.

- **Variation d'un coefficient de la fonction économique :**
  - Calcul d'un intervalle de stabilité pour chaque coefficient
- **Variation du second membre d'une contrainte :**
  - Pour quelles valeurs la solution de base obtenue reste-t-elle optimale ?

Post-optimisation

- **inclusion d’une nouvelle variable de décision ou d’une nouvelle contrainte.**
- **altération d’une valeur b_i ou d’un coût c_j.**