

---

---

EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

**EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE – RATRAPAGE<sup>2</sup>**

10 juillet 2012 – **DURÉE 3h00**

*La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.*

*L'utilisation des 2 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée*

- Ne pas détacher les feuilles.
  - Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.
  - Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille
- 
- 

NOM : .....

NOTE

--

**DÉTAIL**

Exercice 1.
-------------

--

Exercice 2.
-------------

1	2	3	4

--

Exercice 3.
-------------

1	2	3a	3b

--

NOM : .....

**Exercice 1**

Considérons une suite de nombres entiers  $a_1, a_2, \dots, a_n$  avec  $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i$ . La moyenne arithmétique est donnée par la formule

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

Considérons aussi le calcul itératif

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_k &= \frac{k-1}{k} S_{k-1} + \frac{1}{k} a_k; k \geq 2 \end{aligned}$$

1. Montrer que les deux formules de calcul  $M_n$  et  $S_n$  sont équivalentes.

*SOL.*- On a  $S_1 = a_1; S_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \Rightarrow 2S_2 = (a_1 + a_2); S_3 = \frac{2}{3}S_2 + \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \Rightarrow 3S_3 = (a_1 + a_2 + a_3)$ , et donc

$$kS_k = (a_1 + \dots + a_k); k \geq 1$$

En utilisant cette relation, on a

(a)  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n} a_n = \frac{n-1}{n} S_{n-1} + \frac{1}{n} a_n = S_n$ , et

(b)  $S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-1} + \frac{1}{n} a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n} a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = M_n$

ce qui établit l'équivalence.

NOM : .....

2. Supposons que nous travaillons avec un ordinateur qui utilise le standard IEEE 744, double précision. En établissant les algorithmes respectifs pour chacun de deux calculs,  $M_n$  et  $S_n$ , indiquer lequel de ces deux calculs est le plus précis. Justifier brièvement votre réponse.

*SOL.*- Algorithme pour  $M_n$ .

$M_n = a_1$

Pour  $k = 2$  à  $n$  faire

Début

$$M_n = M_n + a_k$$

Fin

$$M_n = M_n / n.$$

Algorithme pour  $S_n$

$S_n = a_1$

Pour  $k = 2$  à  $n$  faire

Début

$$S_n = (k - 1) \times S_{k-1} / k + a_k / n$$

Fin

Le premier algorithme effectue  $n - 1$  additions des nombres entiers, qui se font sans erreur de calcul, tandis que le second algorithme effectue  $2(n - 1)$  divisions et  $n - 1$  additions des nombres réels, chaque addition ayant une erreur de calcul. Par conséquent le premier algorithme est plus précis.

NOM : .....

## Exercice 2

Soit la formule

$$y = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

Écrire l'algorithme qui, sans modifier ou simplifier la formule, effectue le calcul et évalue la borne supérieure de l'erreur de calcul propagée par l'utilisation de cet algorithme.

*SOL.* - Les étapes de l'algorithme sont

1.  $s \leftarrow 1 + x$
2.  $r \leftarrow 1 - x$
3.  $w \leftarrow s \times r$
4.  $y \leftarrow 2/w$

Donc  $r = 4$ .

On a

$$1. \ x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(1)}(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1+x \\ 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} = x^{(1)}$$

$$2. \ x^{(1)} = \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(2)}(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} s \\ 1-x \\ 2 \end{bmatrix} = x^{(2)}$$

$$3. \ x^{(2)} = \begin{bmatrix} s \\ r \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(3)}(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} s \times r \\ 2 \end{bmatrix} = x^{(3)}$$

$$4. \ x^{(3)} = \begin{bmatrix} w \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(4)}(x^{(3)}) = [2/w] = x^{(4)} = y$$

et donc  $\phi = \phi^{(4)} \circ \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}$ .

Calcul de  $\psi^{(k)}$  pour  $k = 1, \dots, r-1 = 3$ . On a

$$\psi^{(1)} = \phi^{(4)} \circ \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)}(x^{(1)}) = \frac{2}{s \cdot (1-x)}$$

$$\psi^{(2)} = \phi^{(4)} \circ \phi^{(3)}(x^{(2)}) = \frac{2}{s \cdot r}$$

$$\psi^{(3)} = \phi^{(4)}(x^{(3)}) = \frac{2}{w}$$

On calcule les jacobiens :

$$J[\phi(x)] = -\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$J[\psi^{(1)}(x^{(1)})] = \left[ \frac{-2}{s^2(1-x)}, 0, \frac{2}{s(1-x)^2}, 0 \right]$$

$$J[\psi^{(2)}(x^{(2)})] = \left[ \frac{-2}{s^2 r}, \frac{-2}{s r^2}, 0 \right]$$

$$J[\psi^{(3)}(x^{(3)})] = \left[ \frac{-2}{w^2}, 0 \right]$$

On a  $\Delta x = [\Delta x]$

Calcul des matrices  $\mathbf{H}_i$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_4 = [\eta_4]$$

Application de la formule (1.8.19) du poly :

$$\begin{aligned}
\Delta y &= J[\phi(x)] \Delta x + \sum_{k=1}^{r-1} J[\psi^{(k)}(x^{(k)})] \mathbf{H}_k x^{(3)} + \mathbf{H}_r y \\
&= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \Delta x + \left[ \frac{-2}{(1+x)^2(1-x)}, 0, \frac{2}{(1+x)(1-x)^2}, 0 \right] \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+x \\ 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} + \\
&\quad \left[ \frac{-2}{(1+x)^2(1-r)}, \frac{-2}{(1+x)(1-x)^2}, 0 \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+x \\ 1-x \\ 2 \end{bmatrix} + \\
&= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \Delta - \frac{2}{(1-x^2)} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \eta_4) + [\eta_4] \frac{2}{(1+x)(1-x)}
\end{aligned}$$

d'où on obtient

$$|\Delta y| \leq \frac{|2x|}{(1-x^2)^2} |\Delta x| + \frac{8}{|1-x^2|} \text{eps}$$

## Exercice 1

Soit le système d'équations linéaires

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (0.1)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ matrice carrée symétrique, } \mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{I}_n \text{ matrice identité d'ordre } n$$

On suppose que les matrices  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{I}_n$  et  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}_n$  sont régulières.

1. Montrer que la solution  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$  du système (0.1) est de la forme  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix}$ , avec  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ .

**SOL.** On a  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow (\mathbf{A}_1 + \mathbf{I}_n) \mathbf{u}_1 = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{I}_n) \mathbf{u}_2$ . Comme  $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{I}_n)$  est régulière, on en déduit que  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{x}_1$ .

2. Montrer que la solution du système (0.1) est équivalente à la solution du système  $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}_n) \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ .

**SOL.** Soit  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix}$  une solution du système. Donc  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}_n) \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ .

3. On cherche à résoudre le système (0.1) par la méthode itérative suivante :

$$\mathbf{Bx}^{(k+1)} + (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}; k = 0, 1, 2, \dots \quad (0.2)$$

avec  $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{I}_{2n}$ , où  $c \in \mathbb{R}$  et  $c \neq 0$ . On prendra  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$  un vecteur initial arbitraire.

Déterminer l'intervalle dans lequel doit appartenir  $c$  pour que la solution  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$  où  $\mathbf{x}$  est solution du système (0.1) et ceci quel que soit  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

**SOL.** L'itération (0.2) peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{I}_{2n} - c\mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} + c\mathbf{b}; k = 0, 1, 2, \dots$$

Ce schéma converge si et seulement si le rayon spectral de la matrice  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_{2n} - c\mathbf{A}$  est strictement inférieur à 1. Exprimons les valeurs propres de  $\mathbf{C}$  en fonction des valeurs propres de  $\mathbf{A}$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{v}$  le vecteur propre associé. On a

$$\mathbf{Cv} = \mathbf{v} - c\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{Av} = \frac{1-\lambda}{c} \mathbf{v}$$

Donc les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont de la forme  $\mu = \frac{1-\lambda}{c}$  où  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathbf{C}$ . On doit avoir pour la convergence  $|\lambda| < 1$  ce qui signifie  $|1 - c\mu| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - c\mu < 1 \Rightarrow 0 < c < \frac{2}{\mu}$ . Cette inégalité doit être vérifiée pour toute valeur propre de  $\mathbf{A}$ . Par conséquent on a

$$c \in \left] 0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})} \right[$$

où  $\rho(\mathbf{A})$  est le rayon spectral de  $\mathbf{A}$ .

4. Soient  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{2n}$  les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ . Pour une valeur propre quelconque  $\mu_i$  de  $\mathbf{A}$ , la valeur propre correspondante  $\lambda$  de  $\mathbf{C}$  est une fonction  $\Lambda(c, \mu_i) = 1 - c\mu_i$ , avec  $0 < c < \frac{1}{\mu_1}$ . Posons

$$c_0 = \frac{2}{\mu_1 + \mu_{2n}}$$

Vérifier que  $\Lambda(c, \mu_{2n}) = -\Lambda(c, \mu_1)$ .

**SOL.** On vérifie aisément que  $\Lambda(c, \mu_{2n}) = \frac{\mu_{2n} - \mu_1}{\mu_1 + \mu_{2n}} = -\Lambda(c, \mu_1)$

5. Montrer que  $c_0$  minimise la fonction

$$g(c) = \max_{1 \leq i \leq n} |\Lambda(c, \mu_i)|$$

qui est donc la valeur de  $c$  pour laquelle la convergence du schéma itératif (0.2) est la plus rapide.

**SOL.** On a  $\Lambda(c, \mu_{2n}) \geq \dots \geq \Lambda(c, \mu_1)$ . Donc  $g(c) = \max_{1 \leq i \leq n} |\Lambda(c, \mu_i)| = \max\{|\Lambda(c, \mu_1)|, |\Lambda(c, \mu_{2n})|\}$ . On

aboutit au résultat en observant que si  $0 < c < \frac{2}{\mu_1 + \mu_{2n}}$ , alors  $|\Lambda(c, \mu_{2n})| \geq |\Lambda(c, \mu_1)|$  et si  $\frac{2}{\mu_1 + \mu_{2n}} < c < \frac{2}{\mu_1}$ , alors  $|\Lambda(c, \mu_1)| \geq |\Lambda(c, \mu_{2n})|$ .

### Exercice 3

Rappelons qu'un algorithme est une application  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $D \subset \mathbb{R}^m$ , telle que pour un  $\mathbf{x} \in D$ , on a  $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$ .

Rappelons aussi qu'étant donné un algorithme  $\phi$ , le facteur de conditionnement de cet algorithme est donné par la formule

$$\kappa = \mathbf{x} \cdot \frac{J(\phi(\mathbf{x}))}{\phi(\mathbf{x})}$$

où  $J(\phi(\mathbf{x}))$  est le jacobien de  $\phi$ .

Soit le système d'équations linéaires

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}; \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}; \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad (0.3)$$

dont on cherche à calculer la solution  $\mathbf{x}$ .

1. Formuler la solution de ce problème en utilisant la notion de l'algorithme.

**SOL.**  $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{b}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .

2. Calculer la norme  $\|\kappa\|_2$  du facteur de conditionnement pour ce problème.

**SOL.**  $J(\phi(\mathbf{x})) = \mathbf{A}^{-1}$ . Donc

$$\|\kappa\|_2 = \frac{\|\mathbf{b}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|_2} = \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2$$

3. La solution par de méthodes directes du système d'équations linéaires (0.3) conduit toujours à factoriser la matrice  $\mathbf{A}$  en deux matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ . Nous avons ainsi

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (0.4)$$

et la résolution de (0.3) se réalise par la résolution de deux systèmes

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}; \quad \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (0.5)$$

reputés plus simples à résoudre.

En utilisant le conditionnement des matrices, établir un critère qui permet de savoir si la méthode de résolution donnée par (0.5) peut être utilisée sans perte notable de la précision du résultat à la place de la résolution par inversion de la matrice  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .

**SOL.-** On forme la quantité

$$\kappa = \frac{\text{cond}(\mathbf{B}) \cdot \text{cond}(\mathbf{C})}{\text{cond}(\mathbf{A})}$$

Si  $\kappa \gg 1$ , on a une perte importante de la précision du résultat.

#### Exercice 4

Soit  $\mathbf{A}$  une matrice inversible d'ordre  $n$ ,  $\mathbf{b}$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ ; on note  $\mathbf{x}$  la solution du système  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Soit  $\Delta\mathbf{A}$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On suppose que la matrice  $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$  est également inversible.

On considère le système linéaire perturbé  $(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}' = \mathbf{b}$ .

On écrit sa solution  $\mathbf{x}'$  sous la forme  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  où  $\mathbf{x}$  est la solution du système initial  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

1. Établir une expression de  $\delta\mathbf{x}$  en fonction de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\Delta\mathbf{A}$

**SOL.-**  $(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}' = \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \delta\mathbf{x} = -(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^{-1}\Delta\mathbf{A}.\mathbf{x}$

2. Que se passe-t-il si  $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ?

**SOL.-** On trouve  $\delta\mathbf{x} = -(\mathbf{A} + \mathbf{0})^{-1}\mathbf{0}.\mathbf{x} = \mathbf{0}$  : la perturbation sur la solution est nulle si celle que la matrice initiale du système l'est aussi.

3. Montrer que l'on peut obtenir une expression de  $\delta\mathbf{x}$  en fonction de  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\Delta\mathbf{A}$  sous la forme :

$$\delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$$

**SOL.-**  $(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = -\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \Leftrightarrow \delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$

4. En déduire une majoration de  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  sous la forme :

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \frac{1}{(1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\|)}$$

**SOL.-** De  $\delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$  on déduit

$$\|\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\| (\|\mathbf{x}\| + \|\delta\mathbf{x}\|)$$

donc

$$(1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\|) \|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\| \frac{1}{(1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\|)} = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \frac{1}{(1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\|)} \\ &= \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \frac{1}{(1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\|)} \end{aligned}$$

On considère le système linéaire  $(S_\varepsilon) : \mathbf{A}_\varepsilon \mathbf{x} = \mathbf{b}$  sous la forme

$$(S_\varepsilon) \begin{cases} (100 + \varepsilon)x + y = 101 \\ (1 + \varepsilon)y = 1 \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 100 + \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 101 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

où  $\varepsilon$  représente une erreur sur les termes diagonaux de la matrice du système.

5. Résoudre le système non perturbé  $(S_0) : \mathbf{A}_0 \mathbf{x} = \mathbf{b}$

**SOL.-** SOLUTION :

$$(S_0) \begin{cases} 100x + y = 101 \\ y = 1 \end{cases}$$

donc la solution est  $(x, y) = (1, 1)$

6. Calculez le conditionnement pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  de  $\mathbf{A}_0$ , où  $\mathbf{A}_0$  désigne la matrice du système non perturbé ( $\varepsilon = 0$ )

**SOL.-**

$$\text{cond}_\infty(\mathbf{A}_0) = \|\mathbf{A}_0\|_\infty \|\mathbf{A}_0^{-1}\|_\infty$$

avec

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}_0\|_\infty = \max_{i=1,2} \sum_{j=1}^2 |\mathbf{A}_{ij}| = 101$$

et

$$\mathbf{A}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & -\frac{1}{100} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}_0^{-1}\|_\infty = \max_{i=1,2} \sum_{j=1}^2 |A_{ij}| = 1$$

donc

$$\text{cond}_\infty(\mathbf{A}_0) = 101$$

7. Donnez, en fonction de  $\varepsilon$  et sans calculer explicitement la solution du système perturbé une majoration de l'incertitude

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|_\infty}$$

**SOL.-** D'après la question 4 on a

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \text{cond}_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} \frac{1}{(1 - \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\Delta \mathbf{A}\|_\infty)}$$

Or on a

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

donc

$$\|\Delta \mathbf{A}\|_{\infty} = |\varepsilon|$$

En réutilisant les résultats précédents on obtient :

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}} \leq 101 \frac{|\varepsilon|}{101} \frac{1}{(1 - |\varepsilon|)} = \frac{|\varepsilon|}{1 - |\varepsilon|}$$