

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE I

7 février 2008 – DURÉE 2h00

La consultation des documents et l'échange des documents et des calculatrices est interdit.

L'utilisation des 2 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- Ne pas détacher les feuilles.
 - Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.
 - Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille
-
-

NOM :

NOTE

DÉTAIL

Exercice 1.

Exercice 2.

1	2	3	4

Exercice 3.

1	2	3a	3b

Exercice 4.

1	2	3

NOM :

Exercice 1 –

Pour résoudre l'équation $ax^2 + 2bx + c = 0$ on doit calculer $\sqrt{b^2 - ac}$. Supposons que nous utilisons pour le codage des nombres en machine la norme IEEE-754 et le calcul de $m(x)$, étant donné la valeur x , se fait par troncature. Est-il possible que la vraie valeur de $b^2 - ac$ soit non négative et la valeur calculée négative ? Justifier votre réponse.

SOL.- Non. Si $b^2 - ac \geq 0$, alors $m(b^2) - m(ac)$ car la troncature est une opération monotone. Donc $m(m(b^2) - m(ac)) = (m(b^2) - m(ac))(1 + \eta) \geq 0$ avec $|\eta| \leq \text{eps}$.

Exercice 2

Nous avons un ordinateur qui utilise comme base de numérotation β et dispose de p places pour la mantisse. On sait que si un nombre réel $x > 0$ peut être stocké dans cet ordinateur, alors il peut être représenté sous la forme $x = w \times \beta^n$, avec w nombre entier tel que $\beta^{p-1} \leq w < \beta^p$. Par exemple le réel 123.456 peut être représenté par 123456×10^{-3} et il peut être stocké dans un ordinateur avec $\beta = 2$ et $p = 18$, car $2^{17-1} = 65536 < 13456 < 2^{17} = 131072$. Un tel nombre on l'appellera nombre *digits p.racine* β .

Par la suite on notera $\text{ulp}(x) = \beta^n$ (ulp = Unit in the Last Place de x).

1. Donner la propriété commune de tous les nombres *digits p.racine* β en fonction de ulp .

SOL.- Si un réel a est un nombre *digits p.racine* β alors il est un multiple de $\text{ulp}(a)$.

2. Montrer à l'aide d'un contre-exemple pour $\beta = 2$ que tout réel n'est pas un nombre *digits p.racine* β pour p fini.

SOL.- Prenons $a = \frac{1}{3} = 0.333\dots$

3. Considérons maintenant deux réels a et b tels que $0 < b < a$ et qui sont des nombres *digits p.racine* β . Montrer que a est un multiple de $\text{ulp}(b)$.

SOL.- $a = w \times \text{ulp}(a) > b = w' \times \text{ulp}(b)$ Donc $\text{ulp}(a) \geq \text{ulp}(b)$. On a $\text{ulp}(a) = \beta^k$ et $\text{ulp}(b) = \beta^l$ avec $k \geq l$. Donc $\text{ulp}(a) = \beta^l \beta^{k-l}$ et, par conséquent, a est un multiple de $\text{ulp}(b)$.

4. On continue avec les données de la question précédente. Démontrer que si $\frac{a}{b} \leq 2$, alors $a - b$ est aussi un nombre *digits p.racine* β .

SOL.- Il faut montrer que $a - b$ est un multiple de $\text{ulp}(a - b)$. On a $a \leq 2b \Rightarrow a - b \leq b$. Par conséquent si $a - b = w'' \times \beta^m$, on a $k \geq l \geq m$. Alors $b - a = w \times \beta^k - w' \times \beta^l = w \times \beta^m \beta^{k-m} - w' \times \beta^m \beta^{l-m} = (w \times \beta^{k-m} - w' \times \beta^{l-m}) \beta^m$, donc $b - a$ est un multiple de $\text{ulp}(a - b)$.

Exercice 3

On s'intéresse à la série

$$S = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 + i}$$

dont la somme partielle d'ordre n est notée S_n :

$$S_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 + i}$$

1. En décomposant la fraction en éléments simples, montrer que

$$S_n = 2 - \frac{1}{n+1}$$

SOL : $\frac{1}{i^2+i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ donc $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2+i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ d'où le résultat

2. En déduire la valeur de S .

SOL : le calcul de la limite donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$$

3. On peut calculer la valeur de la somme partielle S_n de deux façons. Soit en sommant dans l'ordre croissant des indices, dans ce cas on évalue :

$$S_{1,n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}$$

soit dans l'ordre décroissant des indices, dans ce cas on évalue

$$S_{2,n} = \frac{1}{n^2 + n} + \dots + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1$$

Les résultats calculés avec un programme en langage C en simple précision sont résumés dans le tableau ci-dessous pour différentes valeurs de n .

n	$S_{1,n}$	$S_{2,n}$	$S_n = 2 - \frac{1}{n+1}$
99	1,989999890	1,990000010	1,99
999	1,999001026	1,999000072	1,999
9999	1,999791980	1,999899983	1,9999

- (a) Quel est le calcul de somme partielle le plus précis ?

SOL : le calcul de $S_{2,n}$ se rapproche davantage de la valeur exacte 1,9999 donc il est plus précis que celui de $S_{1,n}$.

- (b) Donnez une explication et une justification théorique de ce résultat.

SOL : Lorsqu'on effectue les calculs dans $S_{1,n}$ on obtient des sommes de plus en plus grandes devant le terme qui leur est ajouté $\frac{1}{i^2+i}$. Celui-ci vient à être négligé puisqu'on ajoute un grand nombre avec un petit. Par contre lorsqu'on procède au calcul avec $S_{2,n}$ on ajoute progressivement des petits nombres, qui se cumulent progressivement de façon à ce que le phénomène précédent ne se produise pas.

On peut vérifier sur le cas de l'addition de trois nombres a, b et c tels que $a > b > c$, que faire $(a + b) + c$ n'est pas équivalent à faire $a + (b + c)$.

Exercice 4

Considérons une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si \mathbf{A} est régulière, il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\|\mathbf{Ax}\| \geq r \|\mathbf{x}\|$$

et vice-versa.

Vérifier aussi que $r = \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$.

SOL.- \mathbf{A} est régulière $\Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{Ax}\| \Rightarrow \|\mathbf{Ax}\| \geq \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} \|\mathbf{x}\| = r \|\mathbf{x}\|$.

On a $\|\mathbf{Ax}\| \geq r \|\mathbf{x}\|$. Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{0}$. Nous allons démontrer que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. On a $0 = \|\mathbf{Ax}_0\| \geq r \|\mathbf{x}_0\|$. Comme $r > 0$, il s'ensuit que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

2. Supposons que la matrice \mathbf{A} est régulière. Alors il existe un réel $\delta > 0$, tel que pour toute matrice \mathbf{E} vérifiant $\|\mathbf{E}\| \leq \delta$, on a que la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ est régulière.

Exprimer δ en fonction de $\|\mathbf{A}^{-1}\|$.

Indication : Utiliser le résultat précédent.

SOL.- \mathbf{A} est régulière \Rightarrow il existe un réel $r > 0$ tel que $\|\mathbf{Ax}\| \geq r \|\mathbf{x}\|$. Par ailleurs, nous avons $\|(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{Ax}\| - \|\mathbf{Ex}\| \geq \|\mathbf{Ax}\| - \|\mathbf{E}\| \|\mathbf{x}\| \geq (r - \|\mathbf{E}\|) \|\mathbf{x}\| > 0$ si on prend un $\delta < r = \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$.

3. Supposons que la matrice \mathbf{A} est régulière. Montrer que si la matrice \mathbf{B} est singulière, alors

$$\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})} \leq \frac{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

Indication : Utiliser le résultat précédent.

SOL.- À la question précédente, nous avons montré que si $\|\mathbf{E}\| \leq \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$, alors la matrice $(\mathbf{A} + \mathbf{E})$ est régulière.

Inversement si $(\mathbf{A} + \mathbf{E})$ est singulière, alors $\|\mathbf{E}\| \geq \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$

Posons $\mathbf{E} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Donc si $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$ est singulière, on a $\frac{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|} \geq \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|} = \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})}$