

**Exercice 1.-** Soit le programme Scilab

```
for i = 1:60
    x = sqrt(x);
end;
for i = 1:60
    x = x^2;
end;
```

qui, pour chaque valeur de  $x \geq 1$ , fournit comme résultat la valeur initiale de  $x$ .

Pourtant si on exécute ce programme avec  $x = 100.0$ , on a comme résultat  $x = 1.0$ .

Donner, en la justifiant, une explication pour ce résultat aberrant.

**Rappels :** Scilab code les réels en double précision selon le standard IEEE-754. Pour ce codage, nous avons (poly, fasc. 1, p.21) :

- nombre de bits pour la mantisse  $p = 52$ ;
- nombre de bits pour l'exposant  $q = 11$ ;
- Biais = 1023,  $E_{\max} = 1023$ ,  $E_{\min} = -1022$ ;
- Plus grande valeur =  $1.7976E+308$ , plus petite valeur positive =  $2.2250E-308$ ;
- Nombre de chiffres décimaux exacts :  $p/\log_2(10) = 15.65356$ .

Nous avons aussi  $2^{-60} \approx 8.67362E-19$ .

**SOL.-** Notons par  $R(x) = x^{1/2^{60}}$  le résultat de la première boucle du programme. Alors pour tout réel  $x$ , avec  $1 \leq x < 10^{308}$ , on a  $1 \leq R(x) < 10^{308/2^{60}}$ . On a  $308 \times 2^{-60} = 308 \times 8.67362E-19 = 2.67147E-16 < 10^{-15}$ . Si  $x = 100 < 10^{308}$ , alors  $R(x) = 1 + \delta x$ , avec  $\delta x < 10^{-15}$ , c'est-à-dire  $\delta x$  est une quantité petite (le rang du premier chiffre significatif est supérieur à 15) et elle n'est pas prise en compte lors des calculs de la deuxième boucle du programme. Ces calculs s'effectuent donc avec une valeur de  $x = 1$ , d'où le résultat du programme.

**Exercice 2.-** Soit la matrice  $\mathbf{A}$  définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

Partie A : Détermination du conditionnement de  $\mathbf{A}$

1. On considère le vecteur  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

(a) Calculer  $\mathbf{A}\mathbf{u}$

$$\text{SOL : } \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix}$$

(b) Evaluer  $\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_\infty$  et  $\|\mathbf{u}\|_\infty$

$$\text{SOL : } \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_\infty = 1999, \|\mathbf{u}\|_\infty = 1$$

(c) En déduire une minoration de  $\|\mathbf{A}\|_\infty$  en justifiant votre réponse.

$$\text{SOL : } \|\mathbf{A}\|_\infty = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2} \sup_{u \in \mathbb{R}^2} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_\infty}{\|\mathbf{u}\|_\infty} \geq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_\infty}{\|\mathbf{u}\|_\infty} = 1999$$

2. On considère le vecteur  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer  $A^{-1}$

$$\text{SOL : } A^{-1} = \begin{pmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer  $A^{-1}v$

$$\text{SOL : } A^{-1}v = \begin{pmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1997 \\ -1999 \end{pmatrix}$$

(c) Evaluer  $\|A^{-1}v\|_\infty$  et  $\|v\|_\infty$

$$\text{SOL : } \|A^{-1}v\|_\infty = 1999 \text{ et } \|v\|_\infty = 1$$

(d) En déduire une minoration de  $\|A^{-1}\|_\infty$  en justifiant votre réponse.

$$\text{SOL : } \|A^{-1}\|_\infty = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\|_\infty}{\|\mathbf{u}\|_\infty} \geq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = 1999$$

3. Déduire des questions précédentes la valeur d'une constante  $\alpha$  minorant le conditionnement de  $\mathbf{A}$  en norme infinie,  $\kappa_\infty(\mathbf{A})$ , c'est à dire vérifiant :

$$\kappa_\infty(\mathbf{A}) \geq \alpha$$

$$\text{SOL : } \kappa_\infty(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \geq 1999^2 = \alpha$$

4. Pour une matrice carrée quelconque  $\mathbf{M}$  de taille  $n$ , énoncer l'expression de  $\|\mathbf{M}\|_\infty$  en fonction des éléments  $m_{ij}$  de la matrice  $\mathbf{M}$ .

SOL : d'après le cours on a :

$$\|\mathbf{M}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \right)$$

5. La minoration de  $\kappa_\infty(\mathbf{A})$  peut-elle être améliorée (c'est-à-dire peut-on trouver une constante  $\beta > \alpha$  telle que  $\kappa_\infty(\mathbf{A}) \geq \beta$ ) ?

SOL : On ne peut pas améliorer cette minoration car cela voudrait dire que l'on trouve une meilleure estimation des normes infinies de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{A}^{-1}$ . Or on constate avec la définition de  $\|\mathbf{M}\|_\infty$  que l'on a égalité dans les deux minoration. On a donc aussi  $\kappa_\infty(\mathbf{A}) = 1999^2$

Partie B : Effet des erreurs d'arrondi sur la résolution d'un système

On considère le système linéaire  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  avec  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix}$

1. Déterminer la solution  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

SOL :  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  est solution évidente

2. Considérons le système perturbé  $\mathbf{A}(x + \delta x) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$  où  $\delta \mathbf{b} = 10^{-2} \mathbf{v}$ .  
Montrer que la perturbation sur la solution,  $\delta \mathbf{x}$ , peut s'exprimer sous la forme

$$\delta \mathbf{x} = \mu \mathbf{A}^{-1} \mathbf{w}$$

où  $\mu$  est un nombre réel que l'on explicitera, et  $\mathbf{w}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  que l'on déterminera.

SOL :  $\mathbf{A}(x + \delta x) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b} = \mathbf{Ax} + 10^{-2} \mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot 10^{-2} \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1} \cdot 10^{-2} \mathbf{v})$  donc on a  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1} \cdot 10^{-2} \mathbf{v}$  puisque  $\mathbf{A}$  est inversible. On

en déduit :  $\delta \mathbf{x} = 10^{-2} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v}$  soit  $\mu = 10^{-2}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. En déduire  $\|\delta \mathbf{x}\|_\infty$

SOL: On calcule :  $\delta \mathbf{x} = 10^{-2} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v} = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 1997 \\ -1999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.97 \\ -19.99 \end{bmatrix}$   
donc  $\|\delta \mathbf{x}\|_\infty = 19.99$

4. Calculer  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$

SOL :  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = 19.99$  car  $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$

5. Estimer  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$  sans calculer sa valeur exacte

SOL :  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = \frac{10^{-2}}{1999} \approx \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-6}$

6. Quelle relation trouvez-vous entre  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$  et  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$ , et pouvez-vous la prévoir au vu des résultats de la partie A ?

SOL : On sait que  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \kappa_\infty(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\delta \mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$  or ici  $\frac{\|\delta \mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \approx 5 \times 10^{-6}$ . Comme  $\kappa_\infty(\mathbf{A}) = 1999^2 \approx 2000^2 = 4 \times 10^6$ , on aurait pu avoir  $\kappa_\infty(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\delta \mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \approx 4 \times 10^6 \cdot 5 \times 10^{-6} = 20$  ce qui correspond bien à  $\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \approx 20$  trouvé.

**Exercice 3.-** Soit une matrice  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  avec  $\text{rang } \mathbf{X} = r \leq \min\{m, n\}$ .

Rappelons que la décomposition en valeurs singulières est donnée par

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^\top$$

avec  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_r \quad \mathbf{U}_{m-r}]$ ,  $\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_r \quad \mathbf{V}_{n-r}]$ .

Considérons le système  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{y}$ . La solution des moindres carrés est calculée par

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{V}_r \mathbf{\Delta}_r^{-1} \mathbf{U}_r^\top \mathbf{y}$$

1. Appliquer la formule précédente au système

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et calculer le vecteur  $\hat{\mathbf{a}}$ .

**SOL.-** On a rang  $\mathbf{X} = 1$ . La DVS de  $\mathbf{X}$  donne  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

d'où  $\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

2. Soit maintenant la matrice perturbée  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

- (a) Calculer, en utilisant la pseudo-inverse, le vecteur  $\hat{\mathbf{a}}$  pour la matrice perturbée.

**SOL.-**  $\mathbf{X}^+ = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{bmatrix}$ , d'où  $\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/\alpha \end{bmatrix}$

- (b) Évaluer, en fonction de la valeur de  $\alpha$ , la qualité de la méthode des moindres carrés sur cet exemple.

**SOL.-** Si  $\alpha$  grand, alors  $1/\alpha \rightarrow 0$ , et la valeur de  $\hat{\mathbf{a}}$  calculée avec la matrice perturbée se rapproche de sa valeur non perturbée, donc la méthode est, dans ce cas, stable.

**Exercice 4.-** Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

On cherche à démontrer que la matrice est régulière (invertible). Pour la démonstration on ne doit pas faire le calcul de l'inverse, ni du déterminant. On ne doit pas, non plus, utiliser le corollaire qui affirme qu'une matrice diagonalement strictement dominante est invertible.

**SOL.-** En utilisant les disques de Gershgorin, nous avons que le point 0 ne fait pas partie d'aucun de ces disques. Donc  $\mathbf{A}$  n'a pas de valeur propre égale à 0 et elle est, par conséquent, régulière.