
EISTI - DÉPARTEMENT INFORMATIQUE
EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

29 juin 2011 – **DURÉE 3h00**

La consultation des documents et l'échange des documents et des calculatrices est interdit.

L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- Ne pas détacher les feuilles.
 - Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.
 - Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille
-
-

NOM :

NOTE

DÉTAIL

Exercice 1.								
	1	2	3	4a	4b	5		
Ex. 2								
	1	2	3	4	5	6	7	
Ex. 3								
	1	2						
Ex. 4								

Le corrigé se trouve sur <http://sifoci.eisti.fr>, rubrique Analyse numérique.

Exercice 1

Considérons un ordinateur qui utilise la norme IEEE-754 et réalise des calculs en simple précision. Soit le réel $x = 2^3 + 2^{-19} + 2^{-22}$ et soit $\text{fl}(x)$ le nombre-machine correspondant à x . Montrer que

$$\left| \frac{\text{fl}(x) - x}{x} \right| < 2^{-24}$$

SOL.- La représentation binaire de x est 1000.00000000000000001001. Le codage selon la norme IEEE et en utilisant le bit caché est

$$\boxed{0 \quad 00000011 \quad 0000000000000000000010}$$

Par conséquent $\text{fl}(x) = 2^3 + 2^{-19}$ et donc $\left| \frac{\text{fl}(x) - x}{x} \right| = \frac{2^{-22}}{2^3 + 2^{-19} + 2^{-22}} < \frac{2^{-22}}{2^3} = 2^{-25}$.

Exercice 2

On se propose de calculer la matrice $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, utilisée au calcul de la pseudo-inverse, sans effectuer l'inversion matricielle.

Pour cela on suppose que la matrice \mathbf{A} peut être factorisée selon la formule

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}; \mathbf{Q}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

où \mathbf{Q} matrice orthogonale et \mathbf{R} matrice triangulaire supérieure.

Dans la suite on notera

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n]; \mathbf{x}_i \text{ i-ième colonne de la matrice } \mathbf{X}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & \cdots & r'_{1n} \\ 0 & r'_{22} & \cdots & r'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r'_{nn} \end{bmatrix}$$

1. Donner l'expression de \mathbf{X} en fonction de \mathbf{R} .

SOL.- On a $\mathbf{Q}^\top \mathbf{A} = \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{A}^\top \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\top \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{R}^\top \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}^{-\top}$

2. Évaluer r'_{nn} qui est le terme général de la matrice inverse \mathbf{R}^{-1} .

SOL.- On a $r_{nn} r'_{nn} = 1 \Rightarrow r'_{nn} = \frac{1}{r_{nn}}$.

3. Montrer que

$$\mathbf{R} \mathbf{x}_n = \frac{1}{r_{nn}} \mathbf{e}_n$$

où \mathbf{e}_n est le n -ième vecteur de la base canonique.

SOL.- Évident d'après 2.

4. Supposons avoir calculé x_{ij} ($= x_{ji}$) pour $j = n, n-1, \dots, k+1$ et $i \leq j$.

Donner le calcul de x_{ik}

- (a) pour $i = k$, et

SOL.- On a $x_{kk}r_{kk} + \sum_{j=k+1}^n r_{kj}x_{jk} = \frac{1}{r_{kk}} \Rightarrow x_{kk} = \frac{1}{r_{kk}} \left(\frac{1}{r_{kk}} - \sum_{j=k+1}^n r_{kj}x_{jk} \right)$

- (b) pour $i = k-1, \dots, 1$.

SOL.- On a $x_{ik} = \frac{1}{r_{ii}} \left(\sum_{j=i+1}^k r_{ij}x_{jk} + \sum_{j=k+1}^n r_{ij}x_{kj} \right); i = k-1, \dots, 1$.

5. Application : Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

qui admet la factorisation \mathbf{QR} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer la pseudoinverse de \mathbf{A} , en utilisant l'algorithme précédent, sans faire d'inversion matricielle.

Exercice 3

Soit la matrice \mathbf{A} définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On s'intéresse à la méthode de Jacobi pour résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1. Déterminer la matrice d'itération de Jacobi, notée \mathbf{J} .

SOL.-

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{D} - (\mathbf{E} + \mathbf{F})$$

avec

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{E} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F}) \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La méthode est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.

SOL.- D'après le cours on sait que toute matrice à diagonale strictement dominante est définie positive, donc c'est le cas de \mathbf{A} . On sait aussi que dans ce cas la méthode de Jacobi converge.

3. Établir l'expression générale d'un itéré $\mathbf{x}(k+1)$ en fonction de $\mathbf{x}(k)$, où k est le numéro d'itération.

SOL.- $\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}b$ soit

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}x_1^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} - \frac{1}{3} \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. On suppose que $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculer les deux premiers itérés de la suite $\mathbf{x}(k)$.

SOL.-

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -1 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ x_2^{(2)} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

5. Déterminer la solution du système par la méthode de votre choix.

SOL.- On trouve

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

car

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. En déduire le qualificatif s'appliquant au vecteur solution \mathbf{x}

SOL.- x est un point fixe de l'application linéaire

7. En déduire un test d'arrêt de la méthode itérative qui pourrait s'appliquer à l'algorithme de résolution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ par la méthode de Jacobi, en prenant comme point de départ $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Justifiez votre choix.

SOL.- On observe que dès le second itéré on atteint la solution pour la première et la dernière composante de $\mathbf{x}^{(k)}$, il suffit donc d'obtenir la convergence pour la deuxième composante. On peut donc utiliser $\left| x_2^{(k)} \right| < \varepsilon$. Si on veut s'assurer toutefois que des erreurs numériques ne viennent pas polluer les première et dernière composantes de $\mathbf{x}^{(k)}$, on peut utiliser $\left\| \mathbf{x}^{(k)} - (1, 0, 1) \right\|_2 < \varepsilon$

Exercice 4

Considérons la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

1. Montrer que ses valeurs propres (supposées non nulles) sont données par la formule

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc} \right)$$

SOL.- On a $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb) = 0$ et la solution est $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$ d'où on obtient la formule.

2. Montrer que la somme des valeurs propres de \mathbf{A} est égale à la trace de la matrice \mathbf{A} .

SOL.- La somme de racines de l'équation $x^2 + Bx + C$ est égale à $-B$, et ici $B = a + d = \text{trace}(\mathbf{A})$.