

---

---

*EISTI - DÉPARTEMENT INFORMATIQUE*  
**EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE**

14 juin 2011 – **DURÉE 3h00**

*La consultation des documents et l'échange des documents et des calculatrices est interdit.*

*L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée*

- Ne pas détacher les feuilles.
  - Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.
  - Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille
- 
- 

NOM : .....

NOTE

**DÉTAIL**

Exercice 1.									
	1	2	3	4					
Exercice 2.									
	1	2a	2b	3	4	5a	5b	5c	
Ex. 3, Part. A.									
	1	2	3	4	5				
Ex. 3, Part. B.									
	1	2	3	4					
Ex. 3, Part. C.									
	1	2	3	4					
Exercice 4.									

**Le corrigé se trouve sur <http://sifoci.eisti.fr>, rubrique Analyse numérique.**

**Exercice 1 :**

Considérons un ordinateur décimal et soit un réel  $x \in \mathbb{R}$ . Notons par  $fl(x)$  un nombre flottant de l'ordinateur qui est l'approximation par arrondi avec  $k$  digits de  $x$ . Montrer que

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-k+1}$$

**SOL.-** En notation scientifique on a  $x = 0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n$ . Si  $d_{k+1} < 5$ , alors  $fl(x) = 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n$  et  $\frac{|x - fl(x)|}{|x|} = \frac{|0.00 \cdots 0 d_{k+1} \cdots|}{|0.d_1d_2 \cdots|} \leq \frac{5 \times 10^{-k-1}}{0.1} \leq 5 \times 10^{-k} = 0.5 \times 10^{-k+1}$ . Si  $d_{k+1} \geq 5$ , alors  $fl(x) = (0.d_1d_2 \cdots d_k + 10^{-k}) \times 10^n$  et  $\frac{|x - fl(x)|}{|x|} = \frac{|0.00 \cdots 0 d_{k+1} \cdots - 10^{-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots|} \leq \frac{5 \times 10^{-k-1}}{0.1} = 0.5 \times 10^{-k+1}$ .

**Exercice 2 :**

Soit la fonction

$$f(y) = \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}; y \in ]-1, 1[$$

1. Calculer le nombre-condition de  $f$ . Conclusion.
2. Donner un algorithme pour le calcul de  $f$ .
3. Évaluer l'erreur de calcul  $\Delta f$  selon cet algorithme.
4. Proposer une autre façon de calculer cette fonction et vérifier que le calcul est cette fois-ci bien conditionné.

**SOL.-**

1. Nombre-condition de  $f(y) = \left| \frac{\frac{-1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1-y)^2}}{\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}} \right| = \left| \frac{2y}{1-y^2} \right|$ . Donc la fonction est mal conditionnée si  $|y| \simeq 1$ .

2. On pose  $w = \frac{1}{1+y}$ ,  $z = \frac{1}{1-y}$ . Algorithme :

```
r <-- 1/(x+1)
q <-- 1/(x-1)
s <-- r - q
```

3.  $\Delta f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{w^2} & \frac{1}{z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{w} \\ -\frac{1}{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{w} \\ -\frac{1}{z} \end{bmatrix} + \eta_3 \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{z} \right)$

d'où

$$|\Delta f| = \left| -\frac{1}{w^2} \Delta w + \frac{1}{z^2} \Delta z + \eta_1 \frac{1}{w} - \eta_2 \frac{1}{z} + \eta_3 \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{z} \right) \right| \leq A + 2 \left| \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{z} \right) \right| eps.$$

4. Pour éviter le mauvais conditionnement si  $|x| \simeq 1$  on peut poser  $f(y) = \frac{-2y}{1-x^2}$ . On a

$$f(x) = \left| \frac{-2(1-y^2)+4y}{\frac{(1-y^2)^2}{1-x^2}} y \right| = \left| \frac{1+x^2}{1-y^2} \right| \text{ qui est bien conditionné pour } y \in ]-1, 1[.$$

**Exercice 3 :**

Soit la matrice  $\mathbf{A}$  définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

PARTIE A : DÉCOMPOSITION LU DE  $\mathbf{A}$ .

1. Expliciter la structure des matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  et justifier votre réponse. On ne demande pas de calcul.

**SOL.-**  $\mathbf{L}$  est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et ne comporte qu'une sous diagonale non nulle car elle "hérite" de la structure bande de  $\mathbf{A}$ .

$\mathbf{U}$  est triangulaire supérieure et ne comporte qu'une sur diagonale non nulle car elle "hérite" de la structure bande de  $\mathbf{A}$ . On a donc

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \times & \times & \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 \\ 0 & \times & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. On note  $u_{ij}$  les éléments de la matrice  $\mathbf{U}$ , et  $l_{ij}$  ceux de  $\mathbf{L}$ .

(a) Calculer la matrice  $\mathbf{U}$

**SOL.-** On trouve

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(b) Calculer la matrice  $\mathbf{L}$

**SOL.-** On trouve

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

3. En déduire le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$ .

**SOL.-**  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L}) \cdot \det(\mathbf{U}) = \det(\mathbf{U}) = \prod_{i=1}^3 u_{ii} = 1$

4. La matrice  $\mathbf{A}$  est-elle inversible ? Justifiez votre réponse.

**SOL.-**  $\det(\mathbf{A}) = 1$  non nul donc  $\mathbf{A}$  est inversible

5. On veut résoudre le système  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  avec  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

(a) Expliquer la démarche qui permet de résoudre ce système à l'aide de la décomposition  $\mathbf{LU}$ .

**SOL.-** On résout  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  en remplaçant par  $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$  donc on résout successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{Ly} &= \mathbf{b} && \text{pour trouver } \mathbf{y} \\ \text{puis } \mathbf{Ux} &= \mathbf{y} && \text{pour trouver } \mathbf{x} \end{aligned}$$

(b) Donner les deux algorithmes impliqués dans cette démarche, en les adaptant au cas présent

**SOL.-** pour résoudre  $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$  on utilise un algorithme de descente, donné par :

```

 $x_1 \leftarrow b_1$ 
Pour i de 2 à 3
     $x_i \leftarrow \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} x_j \right)$ 
FinPour i

```

Du fait des valeurs de  $L$  on obtient :

```

 $x_1 \leftarrow b_1$ 
Pour i de 2 à 3
     $x_i \leftarrow b_i - l_{i,i-1} x_{i-1}$ 
FinPour i

```

Pour résoudre  $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ , on utilise un algorithme de remontée donné par :

```

 $x_n \leftarrow y_n$ 
Pour i de 2 à 1 par pas de -1
     $x_i \leftarrow \left( y_i - \sum_{j=i+1}^3 u_{i,j} x_j \right)$ 
FinPour i

```

Du fait des valeurs de  $U$  on obtient :

```

 $x_3 \leftarrow y_3$ 
Pour i de 2 à 1 par pas de -1
     $x_i \leftarrow y_i - u_{i,i+1} x_{i+1}$ 
FinPour i

```

- (c) Déroulez les étapes de ces algorithmes pour trouver la variable intermédiaire  $y$  solution de  $Ly = b$  puis celle du système  $Ax = b$ .

**SOL.-**  $y_1 \leftarrow b_1$   
 Pour  $i$  de 2 à 3 donne  
 $y_i \leftarrow b_i - l_{i,i-1}y_{i-1}$   
 FinPour  $i$   
 $y_1 = 1$   
 $y_2 \leftarrow b_2 - l_{2,1}y_1 = 2 - 1 * 1 = 1$   
 $y_3 \leftarrow b_3 - l_{3,2}y_2 = 2 - 1 * 1 = 1$   
 Finalement  $y = (1, 1, 1)$ . Vérification :

$$L * y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = b \quad (5)$$

Ensuite  
 $x_3 \leftarrow y_3$   
 Pour  $i$  de 2 à 1 par pas de -1 donne  
 $x_i \leftarrow y_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$   
 FinPour  $i$   
 $x_3 = 1$   
 $x_2 = y_2 - u_{2,3}x_3 = 1 - 1 * 1 = 0$   
 $x_1 = y_1 - u_{1,2}x_2 = 1 - 1 * 0 = 1$   
 Finalement on a  $x = [1, 0, 1]$ . Vérifions

$$Ux = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = y \quad (6)$$

## PARTIE B : INTERLUDE D'ANALYSE

1. Pour toute matrice symétrique  $S$  déterminer  $\|y\|_2$  en fonction des valeurs propres de  $S$ .

**SOL.-** D'après les propriétés de la norme 2 on a

$$\|S\|_2 = \sqrt{\rho(S^*S)} \quad (7)$$

De la symétrie de  $S$ , on déduit

$$\|S\|_2 = \sqrt{\rho(S^2)} \quad (8)$$

Or les valeurs propres de  $S^2$  sont les carrés des valeurs propres de  $A$  donc

$$\|S\|_2 = \rho(S) = |\lambda_n| \quad (9)$$

où  $\lambda_n$  est la plus grande valeur propre de  $S$  en module.

2. Déterminer  $\|S^{-1}\|_2$  en fonction des valeurs propres de  $S$ .

**SOL.-** La matrice  $S$  est symétrique donc son inverse l'est aussi. On déduit donc comme précédemment que

$$\|S^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(S^{-1*}S^{-1})} = \sqrt{\rho(S^{-2})} = \rho(S^{-1}) \quad (10)$$

Les valeurs propres de  $S^{-1}$  sont les inverses des valeurs propres de  $S$  donc la plus grande valeur propre de  $S^{-1}$  est l'inverse de la plus petite valeur propre de  $S$ , d'où

$$\|S^{-1}\|_2 = 1/|\lambda_1| \quad (11)$$

3. En déduire le conditionnement de  $\mathbf{S}$  en norme 2.

**SOL.-**

$$\text{cond}_2(\mathbf{S}) = \|\mathbf{S}\|_2 \|\mathbf{S}^{-1}\|_2 = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|} \quad (12)$$

4. Estimez les valeurs propres extrémales de  $\mathbf{A}$  en utilisant la méthode des cercles de Gersgorin .

**SOL.-** un cercle de centre 1 et de rayon 1, un cercle de centre 2 et de rayon 1, un cercle de centre 2 et de rayon 2. La matrice est symétrique donc les cercles ligne et colonne sont confondus. Les trois cercles s'intersectent donc on ne peut pas savoir combien de valeurs propres sont réelles a priori (1 ou 3) mais comme  $A$  est symétrique, on sait que les 3 valeurs propres sont réelles. Elles sont comprises entre 0 (strictement puisque  $\mathbf{A}$  est inversible) et 4.

5. Pouvez-vous en déduire une estimation du conditionnement de  $\mathbf{A}$ , relativement à la norme 2 ?

**SOL.-** non puisque le minimum est zéro.

#### PARTIE C : MÉTHODE DE JACOBI POUR RÉSOUDRE LE SYSTÈME $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

1. Déterminer la matrice d'itération de Jacobi, notée  $\mathbf{J}$ .

**SOL.-**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D} - (\mathbf{E} + \mathbf{F}) \quad (13)$$

avec

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{E} + \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. La méthode est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.

**SOL.-** On cherche les valeurs propres de  $\mathbf{J}$ .

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left( \lambda^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2}\lambda \\ &= \lambda \left[ \frac{1}{4} - \lambda^2 + \frac{1}{2} \right] = \lambda \left[ \frac{3}{4} - \lambda^2 \right] = \lambda \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \right] \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda \right] \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \lambda &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Le rayon spectral de  $\mathbf{J}$  est donc égal à  $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$  : la méthode converge.

3. Etablir l'expression générale d'un itéré  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  en fonction de  $\mathbf{x}^{(k)}$

**SOL.-**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(k+1)} &= -\mathbf{x}_2^{(k)} + 1 \\ \mathbf{x}_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{(k)} - \frac{1}{2}\mathbf{x}_3^{(k)} + 1 \\ \mathbf{x}_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}\mathbf{x}_2^{(k)} + 1 \end{aligned}$$

4. Une simulation numérique a été effectuée sous Scilab, on a représenté les coordonnées du vecteur  $\mathbf{x}^{(k)}$  en fonction du numéro d'itération  $k$ , en partant de  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]$  Lequel des trois graphiques ci-dessous est-il celui obtenu ? Justifiez votre réponse.

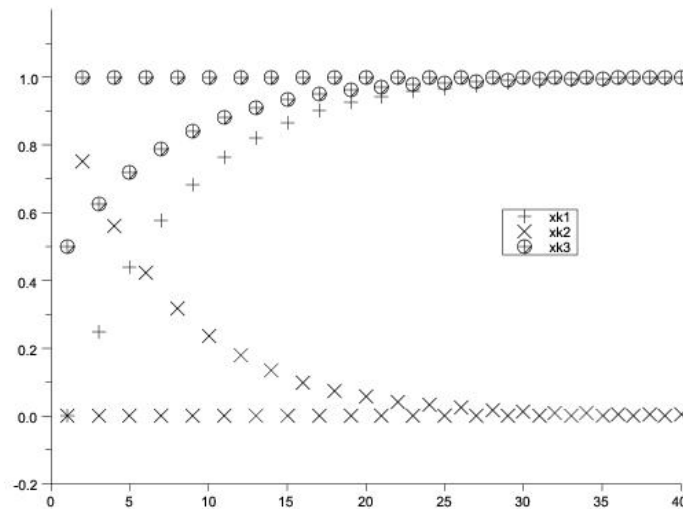


FIGURE 1 – (a)

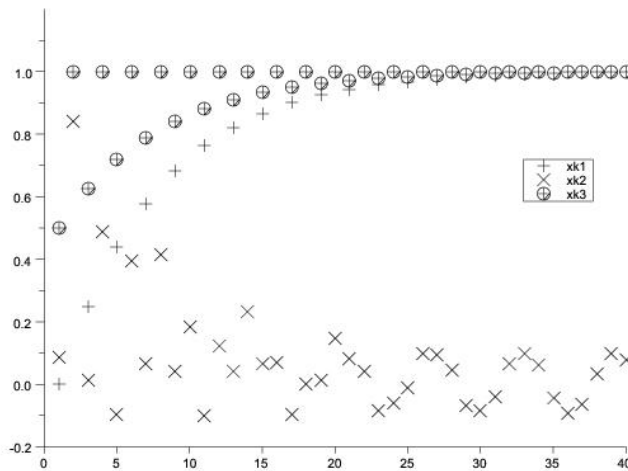


FIGURE 2 – (b)

**SOL.-** le second. Car le premier montre que  $\mathbf{x}_1^{(k)}$  converge vers 0.5, ce qui n'est pas la valeur de la seconde composante de la solution, le troisième montre que  $\mathbf{x}_2^{(k)}$  ne converge pas.

**Exercice 1 :**

Soit  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice diagonale  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ , avec  $d_i \neq d_j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$ . Considérons une perturbation  $\varepsilon \mathbf{A}$  de cette matrice avec  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  petit et  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Supposons que la matrice  $\mathbf{D} + \varepsilon \mathbf{A}$  a comme valeur propre  $\lambda + \varepsilon \mu$  et vecteur propre associé  $\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{u}$ .

1. Montrer que  $\lambda = d_j$  pour un  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

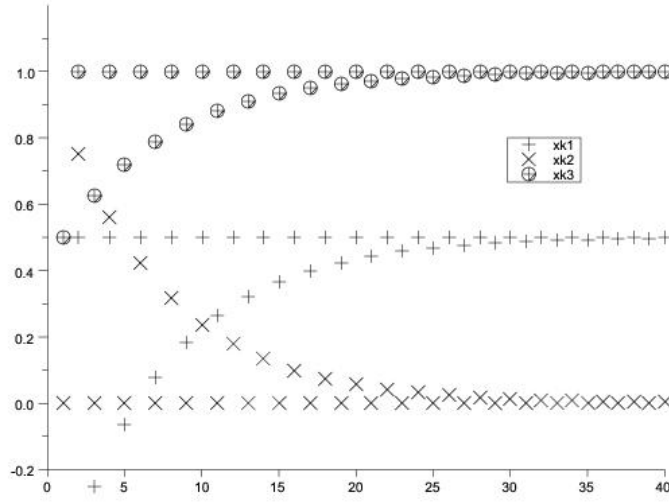


FIGURE 3 – (c)

2. Montrer que le vecteur  $\mathbf{e}$  a toutes ses composantes nulles sauf la  $j$ -ième qui est égale à 1.
3. Montrer que  $\mu = a_{jj}$ .
4. Montrer que  $u_k = -\frac{a_{kj}}{d_{kk} - \lambda}$ ,  $k \neq j$

N.B. On considère que  $\varepsilon^2 \simeq 0$ .

**SOL.-**

1. On a  $(\mathbf{D} + \varepsilon \mathbf{A})(\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{u}) = (\lambda + \varepsilon \mu)(\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{u})$ . En égalisant les coefficients de même puissance pour  $\varepsilon$  on a  $\mathbf{D}\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$  et  $\mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{e}$ .  
 $\mathbf{D}$  est diagonale, donc la première relation donne  $\lambda = d_j$  pour un  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
2. On a  $\text{diag}(d_1, \dots, d_n) \mathbf{e} = d_j \mathbf{e}$  et par conséquent les composantes de  $\mathbf{e}$  sont nulles sauf la  $j$ -ième qui est égale à 1.
3. La deuxième relation s'écrit pour une ligne  $k$  :

$$d_k u_k + a_{kj} = d_j u_k + \mu \delta_{kj} ; 1 \leq k \leq n \text{ et avec } \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où on a  $\mu = a_{jj}$  pour  $k = j$ .

4. Si dans la relation précédente on pose  $k \neq j$  on a  $u_k = -\frac{a_{kj}}{d_{kk} - \lambda}$ .