

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE – RATRAPAGE

26 juin 2012 – **DURÉE 3h00**

La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.

L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- Ne pas détacher les feuilles.
 - Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour le brouillon.
 - Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille
-
-

Exercice 1.- Analyse des erreurs

Soient deux nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \geq b > 0$ et $1 \leq \frac{a}{b} \leq 2$.

On stockera ces nombres en simple précision dans un ordinateur qui suit le standard IEEE 754.

1. Préciser le codage d'un nombre réel selon le standard IEEE 754 (nombre de bits pour le signe, la mantisse et l'exposant).

SOL.- Le standard IEEE, utilise pour la représentation des nombres réels $s = 1$ bit pour le signe, $p = 23$ bits pour la mantisse et $q = 8$ bits pour l'exposant

2. Donner la représentation de ces nombres sous la forme $x = (-1)^{s_i} \times M_i \times 2^{E_i}$, où s_i est le signe, M_i la mantisse et E_i l'exposant, avec $i = a$ ou $i = b$.

SOL.- Le signe pour les deux nombres est $s = 0$. Donc on a

$$a = 1.a_1a_2 \dots a_{23} \times 2^{E_a} = M_a \times 2^{E_a}$$

$$b = 1.b_1b_2 \dots b_{23} \times 2^{E_b} = M_b \times 2^{E_b}$$

3. Considérons les mantisses M_a et M_b et les exposants E_a et E_b des nombres a et b . Donner l'intervalle de variation $[M_{\min}, M_{\max}]$ de ces mantisses considérées comme des nombres entiers et aussi l'intervalle de variation $[E_{\min}, E_{\max}]$ des exposants.

SOL.- Intervalle pour les mantisses : $[0, 2^p - 1]$. Intervalles pour les exposants : $[-126, 127]$.

4. Montrer que $E_a - E_b \in \{0, 1\}$.

SOL.- De la relation $1 \leq \frac{a}{b} \leq 2$ s'ensuit que $M_b \times 2^{E_b} \leq M_a \times 2^{E_a} \leq M_b \times 2^{E_b+1}$ et donc $E_a - E_b \in \{0, 1\}$.

5. Montrer que $a - b = (M_a \cdot 2^\delta - M_b) 2^{E_b}$ et calculer la valeur de δ .

SOL.- $a - b = M_a \times 2^{E_a} - M_b \times 2^{E_b} = M_a \times 2^{E_a - E_b + E_b} - M_b \times 2^{E_b} = (M_a \times 2^{E_a - E_b} - M_b) 2^{E_b} = (M_a \cdot 2^\delta - M_b) 2^{E_b}$ et $\delta = E_a - E_b$.

6. On note $M = M_a \cdot 2^\delta - M_b$. Montrer que $0 \leq M \leq 2^p - 1$.

En conclure que que $a - b$ est une opération qui s'exécute sans erreur en simple précision dans un ordinateur qui suit le standard IEEE 754.

SOL.- On a $a > b$ et $\delta \in \{0, 1\}$. Donc $M \geq 0$. D'autre part on a $a \leq 2b \Rightarrow a - b \leq b \Rightarrow M \cdot 2^{E_b} \leq M_b \cdot 2^{E_b} \Rightarrow M \leq M_b \leq 2^p - 1$.

On a $a - b = M \leq M_b \leq 2^p - 1$. Donc $a - b$ est égal à $M \cdot 2^E$ avec $-126 \leq E \leq 127$ et $0 \leq M \leq 2^p - 1$. Donc $a - b$ est un nombre-machine et il est calculé sans erreur.

Exercice 2.- Algèbre linéaire

1. Soit \mathbf{A} une matrice carrée. Le fait que \mathbf{A} soit à termes diagonaux positifs est-il une condition nécessaire/suffisante/nécessaire et suffisante pour que \mathbf{A} soit définie positive ?

Justifiez votre réponse en donnant des arguments théoriques et des exemples ou contre-exemples.

2. On considère \mathbf{A} une matrice carrée symétrique, et deux décompositions :

– Pour une matrice carrée triangulaire inférieure \mathbf{L}_1 à termes diagonaux positifs, on écrit

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^\top \quad (0.1)$$

– Pour une matrice carrée triangulaire inférieure \mathbf{L}_2 à termes diagonaux égaux à 1, une matrice diagonale \mathbf{D} à coefficients positifs, on écrit

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_2 \mathbf{D} \mathbf{L}_2^\top \quad (0.2)$$

Questions :

- (a) En analysant les propriétés des formes décomposées, déduire quelles sont les décompositions qui peuvent s'appliquer à \mathbf{A} en fonction
 - i. de sa taille ;
 - ii. de son caractère défini positif ou pas ;
 - iii. de son caractère positif mais non défini (c-à-d. matrice définie semi-positive) ;
 - iv. des valeurs des termes diagonaux de \mathbf{A} .
- (b) Quel est le lien existant entre les décompositions 1 et 2 ?

Exercice 3.- Valeurs et vecteurs propres.

Considérons une matrice \mathbf{A} normale, c-à-d $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$. Soit λ une valeur propre de \mathbf{A} correspondant au vecteur propre \mathbf{x} .

1. Montrer que

$$(\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x})^\top (\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}) = 0$$

SOL.- On a $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x})^\top (\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}) = \mathbf{0}^\top \mathbf{0} = 0$.

2. Montrer que λ est aussi valeur propre de \mathbf{A}^\top associée au même vecteur propre \mathbf{x} .

SOL.- On utilise la relation de la question précédente et on a

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x})^\top (\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \lambda^2 \mathbf{x}^\top \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{A}^\top \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \lambda^2 \mathbf{x}^\top \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{x}^\top \mathbf{A} - \lambda \mathbf{x}^\top) \mathbf{A}^\top \mathbf{x} - \lambda (\mathbf{x}^\top \mathbf{A} - \lambda \mathbf{x}^\top) \mathbf{x} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x})^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}) \end{aligned}$$

d'où $\mathbf{A}^\top \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3. Soit λ' une autre valeur propre de \mathbf{A} , avec $\lambda' \neq \lambda$, et soit \mathbf{x}' le vecteur propre associé. Montrer que

$$\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x}' = 0$$

SOL.- On a $\lambda' \mathbf{x}^\top \mathbf{x}' = \mathbf{x}^\top (\lambda' \mathbf{x}') = \mathbf{x}^\top (\mathbf{A} \mathbf{x}') = (\mathbf{A}^\top \mathbf{x})^\top \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}^\top \mathbf{x}'$. Par conséquent $(\lambda - \lambda') \mathbf{x}^\top \mathbf{x}' = 0$ et $\lambda - \lambda' \neq 0$, donc $\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x}' = 0$.

4. *Application.* Soit la matrice normale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 5$. Le vecteur propre associé à λ_1 est $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.566 & 0.424 \end{bmatrix}^\top$.

Calculer les vecteurs propres \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3 associés aux deux valeurs propres λ_2 et λ_3 .

Pour ce calcul, on pourrait faire l'hypothèse supplémentaire que les vecteurs propres \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3 ont leur norme euclidienne égale à 1.

SOL.- En appliquant le résultat de la question précédente on a $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}^T$ et $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.566 & 0.424 \end{bmatrix}^T$.

Exercice 4.- Décomposition en valeurs singulières.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La décomposition en valeurs singulières (DVS) $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T$ de cette matrice est

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

1. Calculer la pseudoinverse \mathbf{A}^+ de \mathbf{A} à l'aide de la DVS.

SOL.- On a $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{U}^T$. Du fait que $\text{rang } \mathbf{\Delta} = 2$, on utilise la DVS réduite et on a

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0.8 \\ 0 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.16 & -0.12 \\ 0.16 & 0 & 0 \\ -0.12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Calculer le nombre condition $\kappa_{\infty}^+(\mathbf{A})$ de \mathbf{A} en utilisant \mathbf{A} et \mathbf{A}^+ .

SOL.- $\|\mathbf{A}\|_{\infty} = 7$, $\|\mathbf{A}^+\| = 0.28$, d'où $\kappa_{\infty}^+(\mathbf{A}) = 7 \times 0.28 = 1.96$.

3. Considérons le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec la matrice \mathbf{A} donnée précédemment et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Calculer sa solution \mathbf{x} .

SOL.- On utilise la pseudoinverse et on a $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.16 & -0.12 \end{bmatrix}^T$.

4. Si le vecteur \mathbf{b} est perturbé, alors on résout en réalité le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}$. Si la perturbation est donnée par le vecteur $\mathbf{\Delta b} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}^T$, calculer la solution $\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}$.

SOL.- On a $\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} 0.028 & 0.176 & -0.132 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.16 & -0.12 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -0.012 & 0.016 & 0.012 \end{bmatrix}^T$.

5. Tester si la formule qui exprime la borne supérieure de l'erreur de perturbation

$$\frac{\|\mathbf{\Delta x}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}} \leq \kappa_{\infty}^+(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{\Delta b}\|_{\infty}}{\|\mathbf{b}\|_{\infty}}$$

est vérifiée pour cette solution.

SOL.- On a $\frac{0.016}{0.16} \leq 1.96 \frac{0.1}{1} = 0.196$ et donc la formule est vérifiée.