

**EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE**

5 juin 2012 – **DURÉE 3h00**

*La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.*

*L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée*

- Ne pas détacher les feuilles.
  - Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour le brouillon.
  - Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille
- 
- 

NOM : .....

NOTE

--

**DÉTAIL**

	1	2	3	4	5a	5b	6	
Exercice 1.								

  

	1	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4	5	6	
Exercice 2A.											

  

	1	2a	2b	3	4	5	6	7	8	9	
Exercice 2B.											

  

Exercice 3.	
-------------	--

  

Exercice 4.	
-------------	--

**Le corrigé se trouve sur <http://sifoci.eisti.fr>, rubrique Analyse Numérique.**

NOM : .....

### Exercice 1 Analyse des erreurs

Soit la fonction

$$y = c \times (a - b); \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

1. Établir deux algorithmes pour le calcul de cette fonction.

**SOL.** 1er algorithme :

```
r <-- c*a
q <-- c*q
s <-- r-q
```

2e algorithme

```
r <-- a-b
s <-- c*r
```

2. Pour chacun des deux algorithmes, calculer l'erreur absolue  $\Delta y$  du résultat.

**SOL.** 1er algorithme

(a) Posons  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ . On a  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \rightarrow \phi^{(1)} \left( \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix} \equiv \mathbf{x}^{(1)} \rightarrow \phi^{(2)} \left( \begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} \equiv \mathbf{x}^{(2)} \rightarrow \phi^{(3)} \left( \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} \right) = [s] \equiv \mathbf{x}^{(3)} = f(y)$

d'où on a  $f(x) = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)} \left( \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \phi = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}$ .

- (b) Calcul des quantités  $\psi^{(k)}$  pour  $k = 1, 2$ . On a

$$\psi^{(1)} = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} (\mathbf{x}^{(1)}) = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \left( \begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = r - c \times b$$

$$\psi^{(2)} = \phi^{(3)} (\mathbf{x}^{(2)}) = \phi^{(3)} \left( \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} \right) = r \times q$$

- (c) Calcul du jacobien pour  $\phi, \psi^{(1)}$  et  $\psi^{(2)}$ .

$$J[\phi(\mathbf{x}^{(0)})] = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial a}, \frac{\partial \phi}{\partial b}, \frac{\partial \phi}{\partial c} \right] = [c, -c, a-b],$$

$$J[\psi^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)})] = \left[ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}, \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial b}, \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial c} \right] = [1, -c, -b]$$

$$J[\psi^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)})] = \left[ \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r}, \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial q} \right] = [1, -1]$$

- (d) Calcul des matrices  $H_k, k = 1, 2, 3$ .

$$H_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & + \\ 0 & \eta_2 & \end{bmatrix}, H_3 = [\eta_3]$$

- (e) Calcul de  $\Delta \mathbf{x}$ . On a  $\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix}$ .

- (f) Calcul de  $\Delta y_1$ . On a

$$\Delta y_1 \simeq [c, -c, a-b] \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} + [1, -c, -b] \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix} + [1, -1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} + [\eta_3][s]$$

$$\Delta y_1 \simeq (c \cdot \Delta a - c \cdot \Delta b + (a-b) \cdot \Delta c) + \eta_1 \cdot c \cdot a - \eta_2 \cdot c \cdot b + \eta_3 \cdot (c \cdot (a-b))$$

En procédant de la même façon, on trouve

$$\Delta y_2 \simeq (c \cdot \Delta a - c \cdot \Delta b + (a - b) \cdot \Delta c) + 2\eta_1 \cdot (c \cdot (a - b))$$

- Indiquer, en le justifiant, le meilleur algorithme pour le calcul de  $y$ .

Le premier terme étant le même pour les deux expressions, on ne tiendra pas compte pour les calculs. On a ainsi

$|\Delta y_1| \leq \text{eps} \cdot (|a| + |b| + |a - b|)$  et  $|\Delta y_2| \leq 2 \cdot \text{eps} \cdot |a - b|$ . Puisque  $|a - b| \leq |a| + |b|$ , le 2e algorithme a une plus petite erreur de calcul.

Cette affirmation est à prendre avec des précautions à cause des majorations que nous avons effectuées lors du calcul de  $|\Delta y_1|$  et  $|\Delta y_2|$ .

## Exercice 2 Décomposition de Cholesky

Soit  $\mathbf{A}$  une matrice à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , supposée symétrique définie positive.

On rappelle qu'il existe une unique matrice triangulaire inférieure  $\mathbf{L}$  ayant des éléments diagonaux réels strictement positifs telle que  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ . On qualifie cette décomposition de décomposition de Cholesky.

- Établir l'expression d'un élément quelconque  $a_{ij}$  en fonction des éléments  $l_{ik}, l_{jk}$ . On tiendra compte de la structure triangulaire de la matrice  $\mathbf{L}$ .
  - l'expression de  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  et celle des éléments de  $\mathbf{L}$  suivants :  $l_{11}, l_{21}, \dots, l_{n1}$ .
  - l'expression de  $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$  et celle des éléments de  $\mathbf{L}$  suivants :  $l_{22}, \dots, l_{n2}$ .
- En déduire l'algorithme qui permet de calculer  $\mathbf{L}$ .
- Calculer la décomposition de Cholesky de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 13 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Cet algorithme est-il applicable à des matrices non symétriques ?
- L'algorithme est-il applicable à des matrices non définies positives ?  
Indication : on reviendra à la définition de la notion de matrice  $\mathbf{A}$  définie positive exprimée à partir de la quantité  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- Application à la résolution de système linéaire
  - Expliquer comment utiliser la décomposition de Cholesky pour résoudre le système  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .
  - Donner l'algorithme de résolution du système triangulaire inférieur.
- Expliquer comment utiliser la décomposition de Cholesky pour déterminer l'inverse d'une matrice  $\mathbf{A}$ .
- Une matrice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  est qualifiée de tridiagonale si  $a_{ij} = 0$  dès que  $|i - j| \geq 2$ .
  - Donner un exemple de matrice tridiagonale de dimension  $n$ .
  - En admettant que si  $\mathbf{A}$  est tridiagonale définie positive alors  $\mathbf{L}$  l'est aussi, adapter l'algorithme de la décomposition de Cholesky aux matrices tridiagonales.

## Exercice 3 Valeurs et vecteurs propres

Considérons une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  de terme général  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , non symétrique. Supposons que  $\mathbf{A}$  est une matrice normale, c'est-à-dire que  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ . On forme le vecteur

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{bmatrix}$$

et la matrice

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top$$

1. Montrer que la dimension du noyau de  $\mathbf{S}$  est égale à 1.

**SOL.-** Le rang de la matrice  $\mathbf{S}$  est égal à 2. Donc  $\dim(\mathbf{S}) = 3 - 2 = 1$ .

2. Montrer que le noyau  $N(\mathbf{S})$  de  $\mathbf{S}$  pourrait être engendré par le vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  défini ci-dessus.

**SOL.-** On a

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où on obtient  $\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  et donc  $\mathbf{u}$  appartient au noyau de  $\mathbf{S}$  et étant donné que  $\dim(\mathbf{S}) = 1$ , on peut considérer qu'il forme la base de  $\mathbf{S}$ .

3. Montrer que  $\mathbf{S}(\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{A}\mathbf{u} \in N(\mathbf{S})$ , sans faire la multiplication de  $\mathbf{A}$  par  $\mathbf{u}$  ni, ensuite, faire la multiplication du résultat avec  $\mathbf{S}$ .

**SOL.-** On a  $\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{A}\mathbf{u}) &= (\mathbf{S}\mathbf{A})\mathbf{u} = \left( (\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top) \mathbf{A} \right) \mathbf{u} = (\mathbf{A}\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}^\top) \mathbf{u} = \left( \mathbf{A} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top) \right) \mathbf{u} = (\mathbf{A}\mathbf{S}) \mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{u}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

4. Montrer que le vecteur  $\mathbf{u}$  est un vecteur propre de la matrice  $\mathbf{A}$ .

**SOL.-** On a  $\mathbf{A}\mathbf{u} \in N(\mathbf{S})$ , donc  $\mathbf{A}\mathbf{u}$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des éléments de la base de  $\mathbf{S}$ . Donc  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  valeur propre de  $\mathbf{A}$ . Du fait que  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , on a que  $\lambda = 0$ .

5. Application numérique :  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Calculer  $\mathbf{u}$  et vérifier que  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

**SOL.-** On a  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ .