Ing1 2007-2008
Remise à niveau - ANALYSE

Correction de la session de rattrapage

Exercice 1 (extrait du concours CCP, filière PSI, 2002)

On désigne par :

- E la fonction partie entière,
- I l'intervalle $]0, +\infty[$,
- $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications continues par morceaux de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leq t$

Si $f \in \mathcal{A}$ et $x \in I$, on considère

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} f(t)dt$$

Le but de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de F.

1. Etude préliminaire

   Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions u_n et v_n définies par

   $$u_n(x) = e^{-nx} \text{ et } v_n(x) = ne^{-nx}$$

   On introduit les séries de termes généraux $u_n(x)$ et $v_n(x)$ qui convergent pour tout choix de $x \in I$.
   On note désormais pour tout $x \in I$

   $$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \text{ et } h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$$

   (a) Déterminer la fonction g sous forme d'une fonction usuelle.
   $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n$. La fonction g est donc égale à la somme d'une série géométrique de raison e^{-x}, soit :

   $$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-(e^{-x})^n}{1-e^{-x}} \end{aligned}$$

   Si $e^{-x} < 1$, c'est à dire si $-x < 0 \Leftrightarrow x > 0$ la série converge.
   Donc

   $$\forall x \in I, g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

(b) Montrer que l'on a pour tout $x \in I$:

$$(1-e^{-x})h(x) = g(x) - 1$$

Cette égalité équivaut à :

$$\begin{aligned}
(1-e^{-x})h(x) &= g(x) - 1 \\
&\Leftrightarrow (1-e^{-x})\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) - 1 \\
&\Leftrightarrow (1-e^{-x})\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} - 1
\end{aligned}$$

Considérons le premier terme on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} - \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-(n+1)x} &= \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)e^{-nx} \\
&= e^{-x} + \sum_{n=2}^{\infty} ne^{-nx} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)e^{-nx} \\
&= e^{-x} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} - 1_{cqfd}
\end{aligned}$$

(c) En déduire que la fonction h s'exprime par :

$$h(x) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

De ce fait on a :

$$\begin{aligned}
(1-e^{-x})h(x) &= g(x) - 1 \\
&\Rightarrow h(x) = \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right)\frac{1}{1-e^{-x}} \\
&= \frac{1-1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}
\end{aligned}$$

On peut aussi le démontrer directement : $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-nx}\right)'$. Etant donné que la série géométrique converge uniformément, on peut intervertir les signes somme et dérivation, on a donc

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-nx}\right)' &= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\right)' \\
&= -\frac{1}{1-e^{-x}}' = -\left[\left(1-e^{-x}\right)^{-1}\right]' \\
&= \left(1-e^{-x}\right)^{-2}.e^{-x} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}
\end{aligned}$$

2. Une étude de $\mathcal{A}$

(a) On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_0(t) = t$
Montrer que si $x \in I$ alors l'application $t \mapsto e^{-xt}f_0(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
Cela revient à étudier

$$F_0(x) = \int_0^{+\infty} te^{-xt}dt$$

Cette intégrale est généralisée en $+\infty$. Comme

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-2}.te^{-xt} = 0 \text{ si } x > 0$$

on sait que l'intégrale converge.

(b) Expliciter $F_0(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} f_0(t)dt$
Par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \int_0^{+\infty} te^{-xt}dt = \left[\frac{te^{-xt}}{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}dt \\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

(c) Vérifier que si $f \in \mathcal{A}$ et si $x \in I$, alors la fonction $\varphi_x : t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
La fonction $\varphi_x : t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ssi l'intégrale suivante converge :

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$$

La fonction f étant continue par morceaux, la fonction $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est continue par morceaux donc localement intégrable. De plus

$$\int_0^{+\infty} \left|e^{-xt}f(t)\right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}tdt$$

qui est une intégrale convergente comme on vient de le montrer.

.

Ainsi lorsque $f \in \mathcal{A}$, la fonction $F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt}f(t)dt$ est bien définie sur I et on note désormais

$$F = \mathcal{L}(f)$$

1.

3. Exemple 1 : fonction partie entière

On considère dans cette question la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_1(t) = E(t)$

(a) Vérifier que la fonction f_1 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ l'ensemble des applications continues par morceaux de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leq t$. La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{aligned} E(t) &\in \mathbb{N} \\ E(t) &\leq t < E(t) + 1 \end{aligned}$$

Elle est continue, puisque constante, sur tout intervalle de la forme $[k, k+1[, k \in \mathbb{N}$ et discontinue en tout point d'abscisse $k \in \mathbb{N}$. De plus étant positive, elle vérifie

$$|E(t)| = E(t) \leq t$$

comme énoncé ci-dessus. On peut donc en conclure qu'elle appartient à $\mathcal{A}$.

(b) Montrer que la fonction $F_1 = \mathcal{L}(f_1)$ peut s'exprimer à l'aide de l'une des deux fonctions g et h, et expliciter $F_1(x)$ pour tout $x \in I$.

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt}E(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} e^{-xt}E(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} ke^{-xt}dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[k\int_k^{k+1} e^{-xt}dt\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_k^{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\left[\frac{e^{-x(k+1)} - e^{-xk}}{-x}\right] = -\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-x(k+1)} + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-xk} \\
&= \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-xk} - \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)e^{-xk} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-xk} \\
&= \frac{g(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}}{x(1-e^{-x})}
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$F_1(x) = \frac{e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$$

4. Exemple 2

On considère dans cette question la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_2(t) = E(t) + (t - E(t))^2$$

et soit $F_2 = \mathcal{L}(f_2)$.

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leq [t - E(t)]^2 \leq t - E(t)$$

Sachant que

$$E(t) \leq t < E(t) + 1$$

on a

$$0 \leq t - E(t) < 1$$

donc

$$0 \leq [t - E(t)]^2 < t - E(t)$$

(b) En déduire que la fonction f_2 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$

Etant constituée de fonctions continues sur tout intervalle de la forme $[k, k+1[, k \in \mathbb{N}$ et E étant discontinue en tout point d'abscisse $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{N}$ De fait on a

$$\begin{aligned}
f_2(n^-) &= n - 1 + (n - (n-1))^2 = n \\
f_2(n^+) &= n + (n-n)^2 = n
\end{aligned}$$

donc la fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Du fait de l'inégalité démontrée ci-dessus, on a $f_2(t) \geq 0$ et

$$f_2(t) = E(t) + (t - E(t))^2 < E(t) + t - E(t) = t$$

donc f_2 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$.

(c) Expliciter $F_2(x)$ pour $x \in I$.

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} f_2(t)dt \\ &= \lim_{X\to\infty} \int_0^X e^{-xt} f_2(t)dt \end{aligned}$$

On peut intégrer par parties :

$$F_2(x) = \lim_{X\to\infty} \left[\left[\frac{e^{-xt}}{-x} f_2(t) \right]_0^X + \frac{1}{x} \int_0^X e^{-xt} f_2'(t)dt \right]$$

Comme $|f_2(t)| \leq t$ on a $\lim_{t\to 0} \left| \frac{e^{-xt}}{-x} f_2(t) \right| \leq \lim_{t\to 0} \left| \frac{e^{-xt}}{-x} t \right| = 0$ et $\lim_{X\to\infty} \left| \frac{e^{-xt}}{-x} f_2(t) \right| \leq \lim_{X\to\infty} \left| \frac{e^{-xt}}{-x} t \right| = 0$ car $x > 0$. D'où

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \lim_{X\to\infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^X e^{-xt} f_2'(t)dt \right] \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-xt} f_2'(t)dt = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-xt} \left[E(t) + (t - E(t))^2 \right]' dt \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-xt} \left[k + (t-k)^2 \right]' dt \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-xt} \left[2\,(t-k) \right] dt \\ &= \frac{2}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} t e^{-xt} dt - \frac{2}{x} \sum_{k=0}^{\infty} k \int_k^{k+1} e^{-xt} dt \\ &= -\frac{2}{x} F_1(x) + \frac{2}{x} F_0(x) = -\frac{2e^{-x}}{x^2(1-e^{-x})} + \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

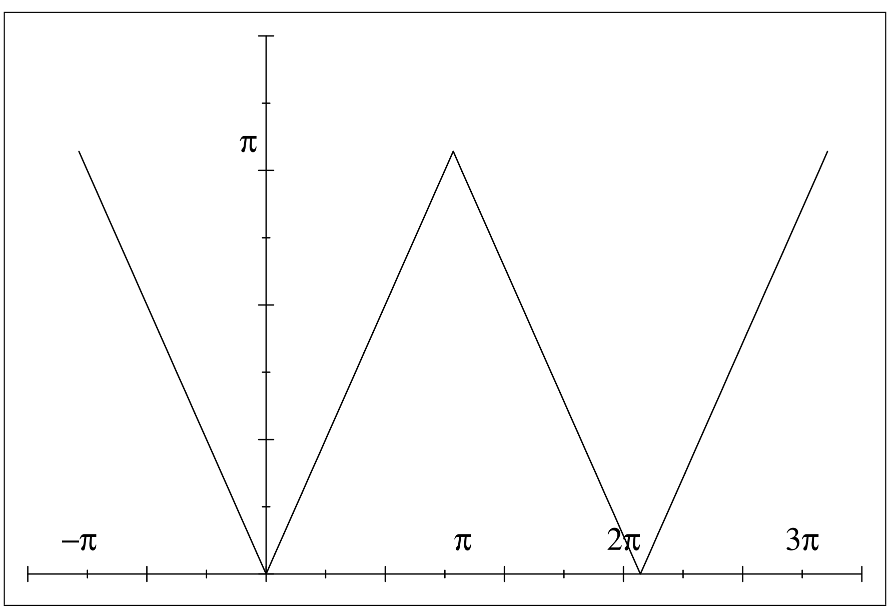
.

Exercice 2

On considère la fonction f de période 2π, définie par

$$f(t) = |t| \text{ pour tout } t \in]-\pi, \pi]$$

1. Représenter graphiquement la fonction f



2. Donner le développement en série de Fourier de f

   La fonction est paire donc les coefficients b_n sont nuls. On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt \\ &= \frac{2}{\pi}.\frac{\pi^2}{2} = \pi \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{t}{n}\sin nt\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos nt\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \end{aligned}$$

   soit

$$\begin{aligned} a_{2p} &= 0 \\ a_{2p+1} &= \frac{-4}{(2p+1)^2\pi} \end{aligned}$$

   Donc

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)x$$

3. Etudier la convergence de ce développement en tout point $x \in \mathbb{R}$

   La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc le développement converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ vers $f(x)$.

4. En déduire la valeur des sommes

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } S_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

   Pour $x = 0$, on a

$$\mathcal{F}_f(0) = f(0) = 0$$

   donc

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} &= 0 \\ &\Leftrightarrow \quad S_1 = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

   L'égalité de Parseval fournit par ailleurs :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Le premier terme donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \; dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(t)|^2 \; dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{\pi^2}{3}$$

Quant au second , on a

$$\begin{aligned}
\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{(2p+1)^4\pi^2} \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{3} &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \\
&\Leftrightarrow \; S_2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^4}{96}
\end{aligned}$$