Ing1 2007-2008
Remise à niveau - ANALYSE

Correction du devoir surveillé

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$

   Notons $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t\sqrt{t}}$. La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est même de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}_+^*$.Elle est donc localement intégrable sur cet intervalle. Remarquant que $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{x}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, on conclut que l'intégrale est généralisée en 0. L'intervalle d'intégration est non borné, il s'agit donc d'une intégrale doublement généralisée.La fonction f n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque le sinus oscille.
   Afin d'étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt$, on écrit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{1} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt$.
   Etude en 0_+
   Sur l'intervalle $]0, 1]$ la fonction f est positive, on peut donc utiliser des équivalents.
   $\dfrac{\sin t}{t\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{t\sqrt{t}} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$ est une intégrale de Riemann en 0 d'exposant $\alpha = 1/2 < 1$, donc convergente. Par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt$ converge.
   Etude en $+\infty$
   $\left|\dfrac{\sin t}{t\sqrt{t}}\right| \leq \dfrac{1}{t\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt$ est une intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$, donc convergente. Par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\right| dt$ est convergente. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt$ est donc absolument convergente, donc convergente.
   Au bilan $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt$ est convergente comme somme de deux intégrales convergentes.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$

   Notons $g : t \mapsto \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$. La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est même de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}_+^*$.Elle est donc localement intégrable sur cet intervalle. Remarquant que $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \sqrt{x} = 0$, on conclut que l'intégrale est faussement généralisée en 0. L'intervalle d'intégration est non borné, il s'agit donc d'une intégrale généralisée en $+\infty$.La fonction g n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque le sinus oscille.
   Nous étudions l'intégrale en écrivant

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = I_1 + I_2$$

   sous réserve que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ ait un sens et sachant que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \widetilde{g}(x)\, dx$ où $\widetilde{g}$ est la fonction prolongée de g en 0 définie par :

$$\widetilde{g} : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

L'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{g}(x)\, dx$ qui est une intégrale définie sur un intervalle borné, donc convergente.
Etudions I_2.En utilisant la définition de l'intégrale impropre on a :

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{X\to+\infty} I_X$$

Procédons à l'intégration par parties dans I_X :$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ v' = \sin x \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \\ v = -\cos x \end{cases}$ et

$$I_X = \left[-\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x\right]_1^X - \int_1^X \frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x dx$$

On a

$$\lim_{X\to+\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x\right]_1^X = \lim_{X\to+\infty} \left(-\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \cos 1\right) = \cos 1 \tag{1}$$

et

$$I'_X = \int_1^X \frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x dx \text{ est de même nature que } I''_X = \int_1^X x^{-3/2}\cos x dx$$

Or $\left|\displaystyle\int_1^X x^{-3/2}\cos x dx\right| \le \displaystyle\int_1^X \left|x^{-3/2}\cos x\right| dx \le \displaystyle\int_1^X x^{-3/2} dx$. Comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_1^X x^{-3/2} dx = \int_1^{+\infty} x^{-3/2} dx$ est une intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2$ en $+\infty$, qui converge, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_1^X x^{-3/2} dx$ existe et est finie. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\cos x dx$ est absolument convergente, donc convergente. Par suite I'_X l'est également et du fait de (1),on déduit que I_X est convergente, donc I_2 également et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ de même.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx$

Notons $h : t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$. La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est même de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}_+^*$.Elle est donc localement intégrable sur cet intervalle. Remarquant que $\displaystyle\mathop{lim}_{x\to0_+} \frac{\cos x}{x} = \mathop{lim}_{x\to0_+} \tfrac{1}{x} = +\infty$, on conclut que l'intégrale est généralisée en 0. L'intervalle d'intégration est non borné, il s'agit donc d'une intégrale doublement généralisée.La fonction h n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque le cosinus oscille.
On étudie l'intégrale en écrivant que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\, dx}_{I} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx}_{J}$$

Etudions par exemple I en premier...Sur l'intervalle $]0, 1]$ la fonction $x \mapsto \cos x$ est de signe constant, on peut donc utiliser un équivalent en 0 : $\dfrac{\cos x}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc I est de même nature que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$. Cette intégrale est une intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = -1$ en 0 donc elle diverge. Par suite I diverge et il est inutile d'étudier J pour conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ diverge.

Exercice 2

Trouver les solutions $(x(t), y(t))$ du système différentiel sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{array} \right.$

Solution:

On applique la transformée de Laplace aux deux équations, on obtient avec $\mathcal{L}(x')(s) = s\mathcal{L}(x)(s) - x(0) = s\mathcal{L}(x)(s) - 8$, et $\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y)(s) - y(0) = s\mathcal{L}(y)(s) - 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} s\mathcal{L}(x)(s) - 8 = 2\mathcal{L}(x)(s) - 3\mathcal{L}(y)(s) \\ s\mathcal{L}(y)(s) - 3 = -2\mathcal{L}(x)(s) + \mathcal{L}(y)(s) \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} (s-2)\mathcal{L}(x)(s) + 3\mathcal{L}(y)(s) = 8 \\ 2\mathcal{L}(x)(s) + (s-1)\mathcal{L}(y)(s) = 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x)(s) \\ \mathcal{L}(y)(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8(s-1)-9}{(s-2)(s-1)-6} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3(s-2)-16}{(s+1)(s-4)} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}$$

Recherche de la fonction $x(t)$ à partir de $\mathcal{L}(x)(s)$.

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

donc on en déduit

$$x(t) = \left(5e^{-t} + 3e^{4t}\right) H(t).$$

Recherche de la fonction $y(t)$ à partir de $\mathcal{L}(y)(s)$.

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

donc on en déduit

$$y(t) = \left(5e^{-t} - 2e^{4t}\right) H(t)$$

Vérification sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} x'(t) = \left(5e^{-t} + 3e^{4t}\right)' = -5e^{-t} + 12e^{4t} \\ y'(t) = \left(5e^{-t} - 2e^{4t}\right)' = -5e^{-t} - 8e^{4t} \end{cases}$$

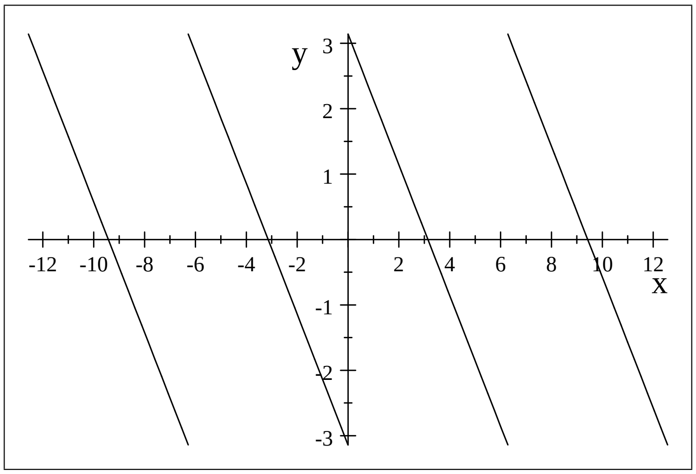
$$\begin{cases} 2x(t) - 3y(t) = 2\left(5e^{-t} + 3e^{4t}\right) - 3\left(5e^{-t} - 2e^{4t}\right) = -5e^{-t} + 12e^{4t} \\ -2x(t) + y(t) = -2\left(5e^{-t} + 3e^{4t}\right) + \left(5e^{-t} - 2e^{4t}\right) = -5e^{-t} - 8e^{4t} \end{cases}$$

On a bien égalité entre les deux membres.

Exercice 3

On considère la fonction f, impaire, de période 2π, égale à $\pi - x$ pour $0 < x < \pi$.

1. Représenter graphiquement la fonction f



2. Donner le développement en série de Fourier de f

   La fonction est impaire, les coefficients a_n sont nuls. On calcule les coefficients b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\right) \end{aligned}$$

   Le changement de variable $X = -x$ appliqué dans la première intégrale, donne $\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx = \int_{\pi}^{0} f(-X)\sin(nX)dX = -\int_{0}^{\pi} f(X)\sin(nX)dX = -\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ donc

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} \pi\sin(nx)dx - \int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx\right) \\ &= 2\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left\{\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx\right\} \\ &= 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n} + 2\frac{(-1)^n}{n} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n} \end{aligned}$$

   Le développement en série de Fourier est donc

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

3. Etudier la convergence de ce développement en tout point $x \in \mathbb{R}$

   D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge vers f en tout point où f est continue, c'est à dire ici en tout point x de $]2k\pi, 2(k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$. Elle converge vers 0 en tous les points $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. En déduire la valeur de la somme
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

   La formule de Parseval donne
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

   soit
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

   On a
$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx &= \int_{-\pi}^{0} f^2(x)dx + \int_{0}^{\pi} f^2(x)dx \\ &= 2\int_{0}^{\pi} f^2(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} (x-\pi)^2 dx \\ &= 2\left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_0^{\pi} = 2\frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

   donc
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$