Séries de Fourier

Laurence LAMOULIE

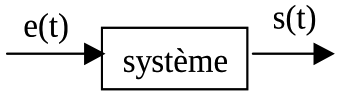
.

Année 2007-2008

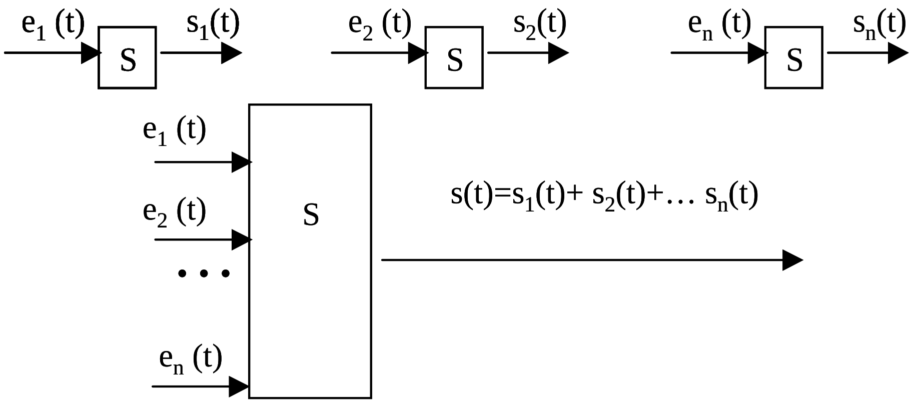
Table des matières

1 Introduction

Dans de nombreux domaines de la physique on rencontre l'étude de systèmes que l'on peut modéliser de la façon suivante :



Lorsque le signal de sortie $s(t)$ dû à l'existence de plusieurs signaux d'entrée, est égal à la somme de signaux de sortie dus à chaque signal d'entrée pris isolément, le système est dit linéaire. On a :



Cette propriété est qualifiée de superposition.

D'un point de vue mathématique, on maîtrise bien la recherche du signal de sortie si l'entrée est constante ou sinusoïdale. Dans la pratique, le signal d'entrée étant modélisé par une fonction périodique de période T, on cherche à décomposer toute fonction périodique en somme de fonctions sinusoïdales.

2 Séries trigonométriques

2.1 Définition

Définition On appelle série trigonométrique, toute série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général f_n est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

où a_n et b_n sont des réels indépendants de t, $\omega \in \mathbb{R}_+$ donné, $n \in \mathbb{N}$

2.2 Cas particulier : fonction périodique de période 2π

On suppose $\omega = 1$ (la pulsation ω est égale à $\frac{2\pi}{T}$ donc ici égale à 1)

2.2.1 Propriétés de périodicité

Définition Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est dite périodique de période T $(T \neq 0)$ si pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(t+T) = f(t)$$

Les fonctions $t \mapsto f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ sont périodiques de période 2π. Par conséquent, si la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, la fonction somme de cette série $t \mapsto \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(t)$ est une fonction périodique de période 2π.

Conclusion : A condition de converger simplement, toute série trigonométrique est périodique de période 2π (si $\omega = 1$).

2.2.2 Calcul des coefficients a_n et b_n

Considérons une série trigonométrique $\sum f_n$ et supposons qu'elle converge sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \end{aligned}$$

Remarque Par convention on suppose que $b_0 = 0$ puisqu'il n'intervient pas.

On peut montrer que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)dt \end{aligned}$$

Remarque 1 : Pour conserver l'homogénéité des formules précédentes on pourra noter

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)dt \end{aligned}$$

Remarque 2 : En raison de la périodicité de f on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)dt \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t) \cos(nt)dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t) \sin(nt)dt \end{aligned}$$

Remarque 3 : Ces résultats s'étendent au cas de fonctions de période $T \neq 2\pi$

3 Développement en série de Fourier

3.1 Fonctions périodiques de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

3.1.1 Discontinuité de 1ère espèce

Considérons une fonction g définie que un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un point t_0 de I.

Définition On dit que g possède une discontinuité de première espèce en t_0, si g possède une limite finie à droite et une limite finie à gauche en t_0.

On note

$$g(t_0^-) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ <}} g(t) \qquad g(t_0^+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ >}} g(t)$$

3.1.2 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

Définition Soit f une fonction à valeurs réelles et $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I si les trois conditions suivantes sont réalisées :

1) La fonction f est définie, continue et dérivable et à dérivée continue en tous points de l'intervalle I, sauf peut-être en un nombre fini de points t_i de I (éventuellement $t_i = a$ ou $t_i = b$)

2) En chacun des points t_i ($t_i \neq a$ et $t_i \neq b$) $f(t_i^-)$ et $f(t_i^+)$ existent dans $\mathbb{R}$. Si $t_i = a$ (resp. $t_i = b$) $f(a^+)$ (resp. $f(b^-)$) existe dans $\mathbb{R}$.

3) En chacun des points t_i ($t_i \neq a$ et $t_i \neq b$) $f'(t_i^-)$ et $f'(t_i^+)$ existent dans $\mathbb{R}$. Si $t_i = a$ (resp. $t_i = b$) $f'(a^+)$ (resp. $f'(b^-)$) existe dans $\mathbb{R}$.

Exemple(s) La fonction g définie par $g(t) = \left\{ \begin{array}{c} t \text{ sur } [0, \pi] \\ -t + 2\pi \text{ sur }]\pi, 2\pi] \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

3.1.3 Fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

Définition Une fonction f périodique, de période T, est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[\alpha, \alpha + T], \alpha \in \mathbb{R}$.

Dans la pratique la fonction f est donnée sur $[0, T]$ ou sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ou $[0, \frac{T}{2}]$ si elle est paire ou impaire, et on vérifie la propriété sur l'intervalle donné.

3.2 Développement en série de Fourier d'une fonction périodique de période 2π

3.2.1 Définition

Définition Etant donnée une fonction f périodique, de période 2π, on appelle série de Fourier associée à f, la série de fonctions $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} f_n$ dont le terme général est la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)dt \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \tag{1}$$

et $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque.
Les nombres a_0, a_n, b_n sont les coefficients de Fourier associés à f.

Remarque Des simplifications apparaissent dans le cas de fonctions paires ou impaires :
- si f est paire, $b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- si f est impaire, $a_0 = a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3.2.2 Théorème de Dirichlet

Position du problème :
Etant donnée une fonction périodique f, de période 2π, telle que a_0, a_n, b_n existent, on constitue la série :

$$\mathcal{F}_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

On doit répondre à deux questions :

1. La série de Fourier associée à f est-elle convergente sur $\mathbb{R}$?
2. Si la serie de Fourier associée à f est convergente, a-t-on $\mathcal{F}_f(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$?

On admettra le théorème suivant :

Théorème Soit f une fonction périodique, de période 2π, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier associée à f est convergente pour toute valeur de t et on a , pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$$

où a_0, a_n, b_n sont les coefficients de Fourier associés à f et donnés par (1)
En particulier en tout point t_0 où f est continue, la somme de la série de Fourier associée à f est égale à $f(t_0)$

3.2.3 Vocabulaire spécifique de la physique

Si une fonction f, périodique, de période 2π, est développable en série de Fourier, nous avons

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$$

où :

1. $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)dt$ représente la valeur moyenne de f sur un intervalle quelconque de longueur 2π,
2. $a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ pour $n \geq 1$ est appelé *harmonique de rang n*
3. l'harmonique de rang 1 : $a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)$ est appelé *fondamental*

   Remarque Par une tranformation géométrique simple on a :

   $$u_n = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = A_n \cos(nt - \varphi_n)$$

   avec :
   - si $a_n \neq 0$:

   $$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \tan\varphi_n = \frac{b_n}{a_n} \text{ pour } \varphi_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

   - si $a_n = 0$:

   $$A_n = |b_n| \qquad \varphi_n = 0$$

   A_n s'appelle l'*amplitude* et φ_n la *phase de l'harmonique* de rang n.

4. On appelle *spectre de fréquence du signal*, la représentation graphique de la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $n \mapsto A_n$

4 Forme complexe de la série de Fourier

Soit f une fonction réelle périodique, de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout intervalle $[\alpha, \alpha + T]$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) de longueur T.

Le terme général de la série de Fourier associée à f est $u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. En utilisant les formules d'Euler, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_n &= a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \\ &= e^{in\omega t}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) + e^{-in\omega t}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) \end{aligned}$$

On pose pour tout $n > 0$:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

alors

$$\overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

d'où

$$u_n = c_n e^{in\omega t} + \overline{c_n} e^{-in\omega t}$$

On montre que

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt$$

et que l'on a

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

Pour $n = 0$:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt$$

Alors :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Conclusion :

La forme complexe du développement en série de Fourier d'une fonction périodique, de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ est :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt, n \in \mathbb{Z}$$

en tout point où f est continue.

Les coefficients de Fourier complexes c_n sont liés aux coefficients de Fourier réels par :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2}, n \in \mathbb{N}^*, i^2 = -1, c_{-n} = \overline{c_n} \end{aligned}$$

Remarque Pour une fonction de période 2π on obtient :
$T = 2\pi$ et $\omega = 1$ car la *pulsation* $\omega = \frac{2\pi}{T}$ donc

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)e^{-int}dt, n \in \mathbb{Z}$$

5 Formule de Parseval

Soit f une fonction réelle périodique, de période T, vérifiant les conditions d'application du théorème de Dirichlet. On démontre la formule suivante :

Théorème Formule de Parseval :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[f(t)]^2\,dt=\frac{a_0^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2},\alpha\in\mathbb{R}$$

Cette formule est valable pour toutes les fonctions à valeurs réelles.

Remarque - Si la série est donnée sous la forme

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega t-\varphi)$$

avec $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, la formule de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[f(t)]^2\,dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2,\alpha\in\mathbb{R}$$

- Si la série est donnée sous forme complexe :

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}$$

la formule s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[f(t)]^2\,dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}|c_n|^2+|c_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\end{aligned}$$

Interprétation physique de la formule de Parseval :

Si la fonction f est la modélisation d'un signal électrique, périodique, de période T, on sait qu'en choisissant des unités convenables, la puissance P du signal est :

$$P=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[f(t)]^2\,dt$$

La formule de Parseval indique donc que la puissance du signal peut se calculer à l'aide des coefficients de Fourier .

Plus précisément le signal se décompose en différents harmoniques dont les puissances sont :

1. la puissance du signal $t\mapsto\frac{a_0}{2}$ est

$$P_0=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\frac{a_0^2}{4}dt=\frac{a_0^2}{4}$$

2. la puissance de la $n^{ième}$ harmonique est (pour $t\mapsto a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)$)

$$P_n=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t))^2\,dt=\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

On observe donc que

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

ce qui signifie que : la puissance d'un signal modélisé par une fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ est égale à la somme des puissances des signaux $t \mapsto \frac{a_0}{2}$ et des différentes harmoniques. C'est la principe de **conservation de la puissance**.

$\boxed{\text{FIN DU CHAPITRE}}$