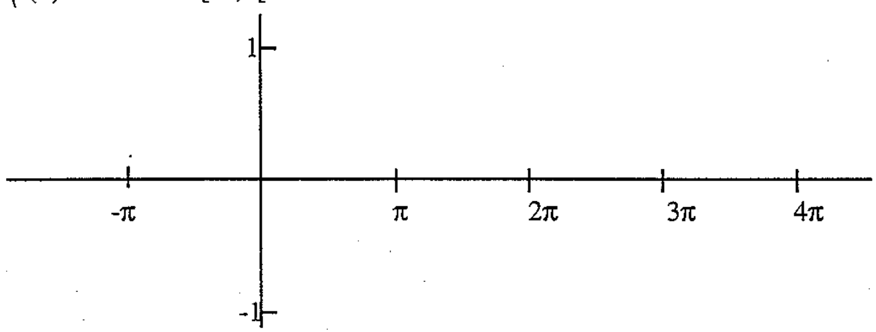
Exemples sur les séries de Fourier

Dans tout ce qui suit la fonction f est supposée de période 2π.

<u>Exemple 1</u>

f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } x \in [0,\pi[\\ f(x) = -1 \text{ si } x \in [-\pi,0[\end{cases}$$



Représentation de f

La fonction f est impaire donc les coefficients a_n sont nuls.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

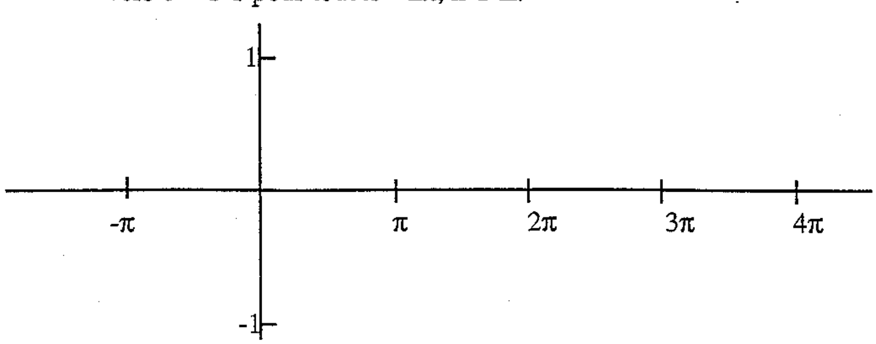
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{-2}{n\pi}[(-1)^n - 1]$$

Donc si n est pair alors les coefficients b_n sont nuls, et si n est impair alors $b_n = 4/n\pi$.
Par conséquent la série de Fourier de f est égale à :

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}$$

La série de Fourier converge :

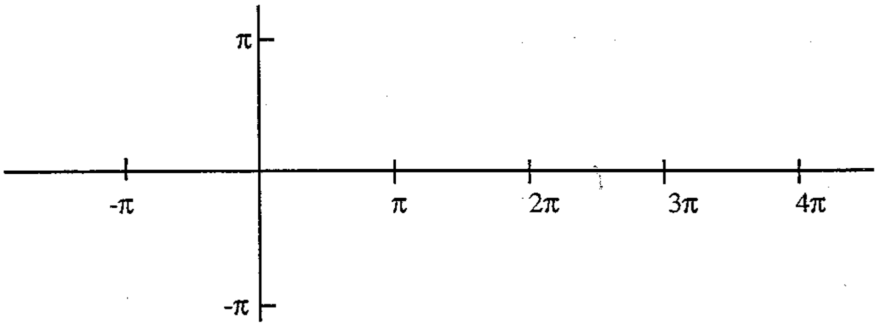
- vers f(x) pour tout $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- vers $0 = 1-1$ pour tout $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Représentation de $\mathcal{F}_f$

Exemple 2

Soit f la fonction définie par f(x) = x pour $|x| < \pi$



Représentation de f

La fonction f est impaire donc les coefficients a_n sont nuls.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right]$$

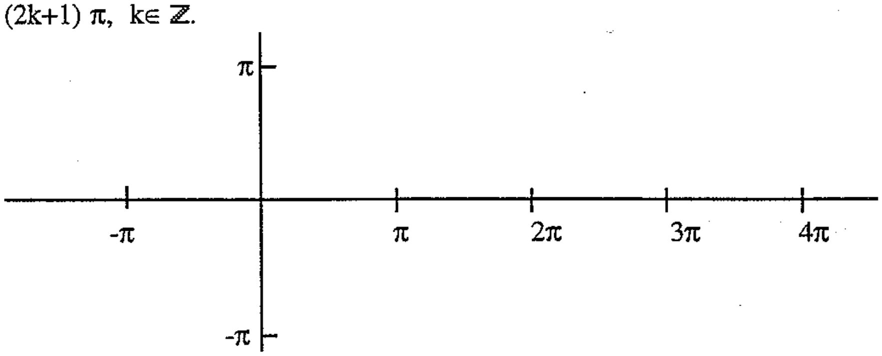
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left[-\pi\frac{(-1)^n}{n} - \pi\frac{(-1)^n}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0}\right]$$

Donc $b_n = 2(-1)^n/n$.

La série de Fourier associée à f est donc :

$$\mathcal{F}_f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$$

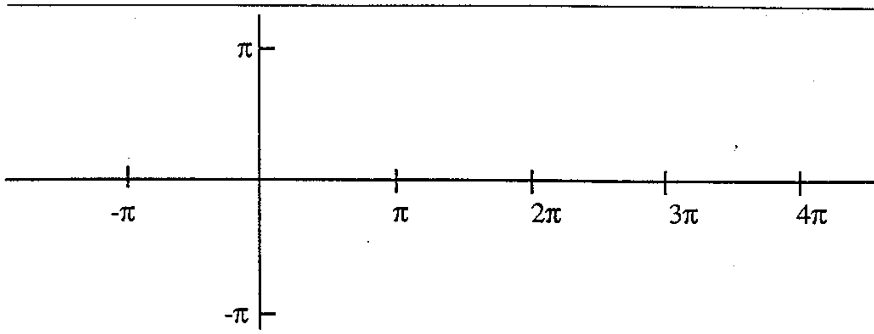
Elle converge vers f(x) pour tout $x \neq \pi + 2k\pi = (2k+1)\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et converge vers 0 pour $x = (2k+1)\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Représentation de $\mathcal{F}_f$

Exemple 3

Soit f la fonction définie par f(x) = |x| pour $|x| < \pi$.



Représentation de f

La fonction f étant paire, les coefficients b_n sont nuls.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

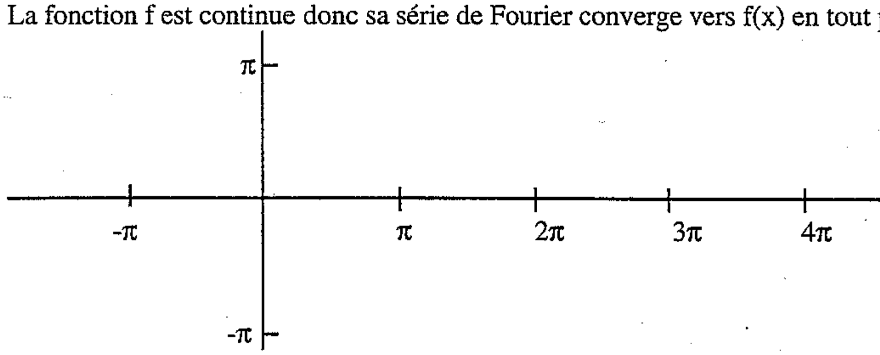
$$\forall\, n \geq 1,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos nx\ \ dx = \left\{\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{n}\, dx\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right]$$

Donc si n est pair $a_n = 0$ et si n est impair alors $a_n = -4/\pi n^2$.
La série de Fourier de f est donc :

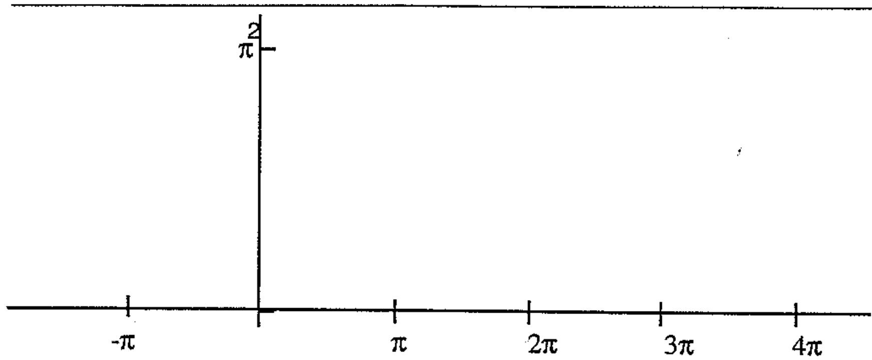
$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$$

La fonction f est continue donc sa série de Fourier converge vers f(x) en tout point x.



Représentation de $\mathcal{F}_f$

Exemple 4
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ pour $|x| < \pi$



Représentation de f

La fonction f étant paire, les coefficients b_n sont nuls.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\forall\, n \geq 1,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \left\{\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\}$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\frac{\sin nx}{n}\,dx = -\frac{2}{\pi}\left\{\left[-x\,\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\,dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left(2\pi\frac{(-1)^n}{n^2}\right) + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 4\,\frac{(-1)^n}{n^2}$$

La série de Fourier associée à f est donc :

$$\mathscr{F}_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$$

Elle converge vers f(x) pour tout x.
En particulier pour $x = \pi$ on obtient :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ donc } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

<u>Exemple 5 </u>: Théorème de Parseval

a) Si $f(x) = e^{inx}$ alors

$$|f(x)|^2 = 1 \text{ donc } E(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dx = 1$$

b) Si $f(x) = \sin nx$ alors

$$|f(x)|^2 = \sin^2 nx \text{ donc } E(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx = = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx = \frac{1}{2}$$